



OTIMIZAÇÃO DE CORTE DE UMA TELA EM FAVO DE CARTÃO

DANIEL VENTURA VALE FERNANDES DIAS

novembro de 2020

OTIMIZAÇÃO DE CORTE DE UMA TELA EM FAVO DE CARTÃO

Daniel Ventura Vale Fernandes Dias

1140558

2020

Instituto Superior de Engenharia do Porto

Departamento de Engenharia Mecânica

Orientadora: Marisa João Guerra Pereira de Oliveira

Coorientadora: Alcinda Maria de Sousa Barreiras

OTIMIZAÇÃO DE CORTE DE UMA TELA EM FAVO DE CARTÃO

Daniel Ventura Vale Fernandes Dias

1140558

Dissertação apresentada ao Instituto Superior de Engenharia do Porto para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica, realizada sob a orientação das professoras Marisa João Guerra Pereira de Oliveira e Alcinda Maria de Sousa Barreiras.

2020

Instituto Superior de Engenharia do Porto

Departamento Engenharia Mecânica



JÚRI

Presidente

Doutor António José Galvão Ramos

Professor Adjunto, Instituto Superior de Engenharia do Porto

Orientador

Doutora Marisa João Guerra Pereira de Oliveira

Professor Adjunto, Instituto Superior de Engenharia do Porto

Co-orientadora

Mestre Alcinda Maria de Sousa Barreiras

Professor Adjunto, Instituto Superior de Engenharia do Porto

Arguente

Doutora Fernanda Amélia Fernandes Ferreira

Professor Adjunto, Escola Superior de Engenharia e Turismo do P.Porto

Agradecimentos

Gostaria de agradecer, em primeiro lugar à professora Marisa Oliveira, minha orientadora, sem a qual todo o trabalho realizado não teria sido possível. Um muito obrigado pela flexibilidade e disponibilidade ao longo da realização desta tese, bem como por toda a experiência e conhecimentos partilhados.

Agradeço, também, à minha coorientadora, professora Alcinda Barreiras pela grande ajuda que prestou partilhando um imenso conhecimento de modelos matemáticos.

Agradeço, igualmente, aos meus colegas e amigos de curso pela entreaajuda e motivação que me proporcionaram ao longo deste período de estudos no ISEP, sem eles não teria atingido os meus objetivos.

Um agradecimento à LIVAL pelo acompanhamento e partilha de informação ao longo do desenvolvimento da dissertação.

Quero agradecer, também, às minhas irmãs, Carolina e Teresa por todo o apoio ao longo deste percurso. E um agradecimento muito especial à Carolina Castro que sempre me motivou a ser e fazer melhor, por estar sempre ao meu lado nos bons e maus momentos e por acreditar sempre em mim.

Por fim, agradeço aos meus pais toda a paciência, apoio incondicional e dedicação. São os meus heróis e os meus exemplos de amor, carinho e perseverança e sem eles nada disto seria possível.

PALAVRAS CHAVE

Corte; Modelo Matemático; Empacotamento; Retângulos; Itens Ortogonais; Sistema de apoio à decisão

Resumo

Os problemas de corte e empacotamento são problemas que são abordados na indústria de forma regular. As resoluções destes problemas têm normalmente consequências positivas em termos de custo-benefício para as empresas que as abordam.

Um problema muito comum na indústria do papel é o corte de uma tela de cartão de forma a obter formas mais pequenas (problema de corte bidimensional), sendo que, no caso de estudo e âmbito da empresa, atualmente, é apresentada uma forma poligonal não guilhotinável.

Neste trabalho estudou-se a melhor forma de resolução de um problema de *Strip-Packing* para utilização na unidade fabril analisando modelos matemáticos com retângulos e polígonos ortogonais.

Os modelos matemáticos mostraram-se eficazes na abordagem ao problema e de grande utilidade para o futuro da empresa, sendo que, no presente, a diminuição no desperdício na unidade fabril usando o modelo/solução desenvolvidos foi de 4,1%.

KEYWORDS

Cut; Mathematical Model; Packaging; Rectangles; Orthogonal Items; Decision support system

Abstract

Cutting and packing problems are problems that are addressed in the industry on a regular basis. Resolving these problems usually has positive cost-benefit consequences for the companies that address them.

A very common problem in the paper industry is the cutting of a cardboard screen in order to obtain smaller shapes (two-dimensional cutting problem), and, in the case of study and scope of the company, a non-guillotinable polygonal shape is currently presented.

In this work, the best way to solve a Strip-Packing problem for use in the factory was studied, analyzing mathematical models with rectangles and orthogonal polygons.

The mathematical models proved to be effective in addressing the problem and of great use for the future of the company, and, at present, the reduction of waste in the factory using the model/solution developed was 4.1%.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

Lista de Abreviaturas

MIT	Massachusetts Institute of Technology
SAD	Sistemas de Apoio à Decisão
SAS	Software as a Service
SPSS	Statistical Package for the Social Sciences
SAP	Software Applications and Products
VBA	Visual Basic for Applications
C&P	Corte e Empacotamento
PEU	Problema de Empacotamento Unidimensional
PCU	Problema De Corte Unidimensional
PEB	Problema De Empacotamento Bidimensional
PCB	Problema De Corte Bidimensional Em Placas
PEBF	Problema De Empacotamento Bidimensional Em Faixas
SPP	Strip Packing Problem

ÍNDICE FIGURAS

Figura 1 - Diferentes tamanhos de Caixas; Autor, 2020	22
Figura 2 - Componentes que perfazem os SAD; (Vairinhos, V. M., V. Lobo, and R. R. Parreira, 2009)	27
Figura 3 - Fluxograma de uso de modelos; Victor Lobo, 2009	29
Figura 4 - Corte Uni (a), Bi (b) e Tridimensional (c) (Revista ESPACIOS; Vol 36 (nº09); 2015)	32
Figura 5 - Formas regulares (a,b) e irregular (c); Autor, 2020	33
Figura 6 - Tipos básicos de problemas de corte e empacotamento, adaptada de Wäscher et al, 2004	34
Figura 7 - Corte de Barras - exemplo de corte interpretado como PCU; Autor, 2020	36
Figura 8 - Exemplos de empacotamento: (a) ortogonal; (b) não-ortogonal; Autor, 2020	37
Figura 9 - Exemplo de corte de uma bobina de papel. Autor, 2020	39
Figura 10 - (a) Corte guilhotinável; (b) Corte guilhotinável com 2 estágios; (c) Corte não-guilhotinável. Autor, 2020	40
Figura 11 - Strip Packing; Ignacio E. Grossman, 2017	42
Figura 12 - Polígono Ortogonal usado pela Lival; Autor, 2020	49
Figura 13- Quadrados relativos a tela; Autor, 2020	51
Figura 14 - Posição relativa em Y; Autor, 2020	52
Figura 15 - Rotação de quadrado simples; Autor, 2020	52
Figura 16 - Variáveis binárias nas equações de não-sobreposição; Autor, 2020	53
Figura 17 - Exemplo de itens ortogonais com posição final na tela; Autor, 2020	58
Figura 18 - Rotação em itens ortogonais; Autor, 2020	59
Figura 19 - Exemplo modelo; Autor, 2020	61
Figura 20 - SAD desenvolvido, exemplo; Autor, 2020	68
Figura 21 - Padrão obtido na simulação 4 da tabela 8; Autor, 2020	71
Figura 22 - Exemplo de modelo misto; Autor 2020	72
Figura 23 - Exemplo misto em latex; Autor, 2020	73

ÍNDICE TABELAS

Tabela 1 - Parâmetros de entrada	50
Tabela 2 - Variáveis a aplicar em modelo de retângulos	50
Tabela 3 - Parâmetros usados em Itens Ortogonais	56
Tabela 4 - Variáveis usadas em Itens Ortogonais	57
Tabela 5 - Cálculo de F_x e F_y	61
Tabela 6 - Resultado final de simulação; Autor, 2020	67
Tabela 7 - Vantagens e Desvantagens de cada modelo	67
Tabela 8 - Simulações; Autor, 2020	69

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO	22
1.1 Breve contextualização do problema.....	22
1.2 Objetivos	23
1.3 A empresa - Lival	24
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	26
2.1 Sistemas de apoio à Decisão	26
2.1.1 Introdução	26
2.1.2 Breve história	27
2.1.3 Desenvolvimento e aplicações.....	28
2.2 O problema do corte e empacotamento	30
2.2.1 Introdução	30
2.2.2 Estrutura dos Problemas de Corte e Empacotamento (C&P)	30
2.2.3 Problemas Unidimensionais.....	34
2.2.4 Problemas Bidimensionais	36
2.2.5 Problemas com mais de duas dimensões e variações no corte e empacotamento	39
2.2.6 Strip Packing.....	41
2.3 Alguns métodos de resolução de problemas de corte e empacotamento	44
2.3.1 Modelos matemáticos.....	44
2.3.2 Programação linear	45
2.3.3 Heurísticas	47
3. MODELOS MATEMÁTICOS PARA POSICIONAMENTO DE ITENS.....	49
3.1 Modelos Matemáticos para posicionamento de itens retangulares e ortogonais	49
3.1.1 Posicionamento de Retângulos.....	49
3.1.2 Posicionamento de Itens Ortogonais	55
3.2 Resultados Computacionais	67
3.2.1 Simulação retângulos	68
3.2.2 Simulação Polígonos Ortogonais.....	72
4. CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	75
4.1 Conclusões.....	75
4.2 Trabalho futuro	76
5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	78

INTRODUÇÃO

1.1 Breve contextualização do problema

1.2 Objetivos

1.3 A empresa - Lival

1. INTRODUÇÃO

1.1 Breve contextualização do problema

Problemas de corte e empacotamento são tidos em conta, diariamente, por inúmeras indústrias a nível mundial, sendo, por isso, um problema recorrente e alvo de estudo em milhares de empresas.

A *Lival* - Artigos de Embalagem Lda. posteriormente referida apenas como *Lival* é uma empresa que tem como principal objetivo a produção de artigos em cartão. Produzem artigos de cartão canelado, espuma/bolha de ar, fitas adesivas, plásticos para embalagem e favo de cartão, sendo este último, atualmente, o seu artigo de maior produção/venda.

De entre os diversos tipos de artigos em favo de cartão que comercializam, são, presentemente, maioritariamente requisitados (em termos de vendas), 3 tipos de caixas para embalagem com diversas dimensões. As dimensões dessas caixas são as seguintes:

- 50x50x50 (a)
- 70x70x80 (b)
- 80x80x90 (c)

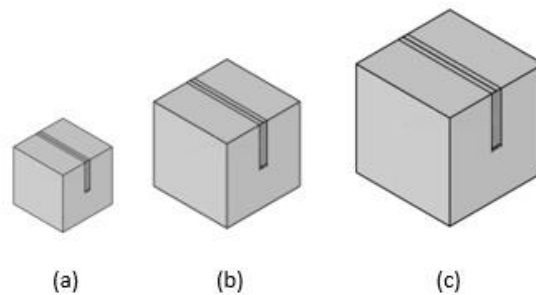


Figura 1 - Diferentes tamanhos de Caixas; Autor, 2020

A manufatura do favo de cartão é realizada com o auxílio de uma máquina de cerca de 30 metros de comprimento onde é criada, a partir de materiais encomendados a fornecedores externos, uma tela sem fim com 2,6 metros de altura desse favo.

A partir desta tela são cortadas formas regulares (retângulos) que posteriormente são dobrados e colados perfazendo assim o artigo (caixa) final.

1.2 Objetivos

Na presente dissertação, procurou-se focalizar toda a atenção na abordagem dos principais problemas reportados pelos técnicos da *Lival*, nomeadamente no que se refere às questões do corte e otimização de recursos quer ao nível da matéria prima, algo que preocupa a empresa pois os desperdícios estarão na ordem dos 60%, quer ao nível de recursos humanos, sendo que estão intrinsecamente relacionados.

Assim, definiu-se como objetivo principal desta dissertação a realização de um sistema operacional de apoio à decisão que, conforme as encomendas recebidas num determinado espaço temporal, apresente um plano de corte da tela de favo de cartão de tal modo a que o desperdício seja minimizado. Este modelo de apoio à decisão será baseado num modelo matemático de otimização de corte que foi desenvolvido ao longo do presente trabalho.

Com este trabalho, a *Lival* deverá ter acesso a um sistema operacional que permita, de forma automática e de acordo com as encomendas registadas no seu sistema informático, definir um plano de corte a ser implementado no sistema produtivo, aumentando a sua eficiência e minimizando o esforço dos operários e o desperdício produzido.

Ao adotar este sistema, a empresa deverá tornar a fase do processo em estudo mais célere e, assim, melhor responder às necessidades do mercado.

1.3 A empresa - Lival

A empresa *Lival - Artigos de embalagem, Lda., Lival*, foi a empresa escolhida como caso de estudo para o problema antes mencionado. A *Lival* tem, desde o ano de 1990, sede em Recarei, Paredes, contando atualmente com 70 funcionários desde a área de produção à administração. Os setores automóveis e de mobiliário são, de entre os seus clientes, os mais representativos, muito embora a *Lival* tenha como meta continuar a crescer e expandir a sua área de negócio para outros setores.

Nos anos de 2014, 2015, e 2016 a *Lival* recebeu o prémio de *PME Líder* e possui um Sistema de Gestão de Qualidade que está de acordo com os requisitos da norma ISO 9001:2008, o qual permite à empresa um controlo mais eficiente dos processos produtivos e uma melhor gestão a nível operacional. Este foco na melhoria contínua tem-se revelado crítico para a rentabilidade da empresa assim como para a satisfação dos seus clientes.

Para além disso, como vantagem comparativa, a *Lival* procura ser uma empresa 100% focada na qualidade dos seus produtos e em proporcionar um ambiente de trabalho seguro com a qualificação, motivação e formação dos seus colaboradores.

Como referido anteriormente os principais produtos que a *Lival* apresenta o favo de cartão, cartão canelado, espuma/bolha ar, fitas adesivas e plásticos técnicos de embalagem.

Para a definição dos objetivos da presente tese optou-se pelo produto mais relevante que são as caixas em cartão produzidas para o seu maior cliente.

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Sistemas de apoio à Decisão

2.2 O problema do corte e empacotamento

2.3 Alguns métodos de resolução de problemas de corte e empacotamento

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Sistemas de apoio à Decisão

Neste capítulo serão apresentados os tópicos considerados, à priori, mais relevantes para responder aos objetivos da presente dissertação. Primeiramente, será apresentado o conceito de sistemas de apoio à decisão (SAD). Seguidamente, os modelos matemáticos aplicados no decorrer do corrente trabalho, serão descritos apresentando-se como formas concretas e aplicacionais de SAD.

2.1.1 Introdução

Um sistema de apoio à decisão, SAD, pode ser definido como sendo um sistema computadorizado que tem como função auxiliar os gestores encarregues do sistema, de forma a tornar o processo mais rápido e eficaz de um ponto de vista de tomada de decisão. Melhora assim a organização de toda a estrutura empresarial onde é aplicada sendo que o objetivo principal é a otimização de processos.

Os SAD, por norma, compilam a informação de negócio e organizacional disponível (vendas, espaço, custos, entre outros) e, de forma lógica e concisa, tomam uma decisão para a qual foram parametrizados. Por sua vez, esta parametrização é baseada no julgamento humano que normalmente deriva de experiência e conhecimento adquirido (Power, 2003).

Tal como podemos visualizar na figura 2, existe uma dimensão considerável de áreas em que os SAD são utilizados bem como a informação que os mesmos requerem para ser o mais completos possíveis.



Figura 2 - Componentes que perfazem os SAD; (Vairinhos, V. M., V. Lobo, and R. R. Parreira, 2009)

Os SAD têm evoluído exponencialmente ao longo dos anos! Um dos grandes motivos para esta melhoria são os desenvolvimentos tecnológicos, quer pela evolução de *softwares* e automação quer pela sua aplicabilidade aos processos produtivos, levando a que os SAD, por “arrasto” melhorem também, proporcionando, deste modo, cada vez melhores resultados na otimização de processos.

Genericamente, podemos afirmar que, com a utilização dos SAD, o erro humano decresce no que toca a tomadas de decisão sendo auxiliados pelos sistemas computadorizados.

Uma das grandes vantagens da utilização dos SAD é que estes são facilmente parametrizáveis e adaptados ao problema específico a resolver.

2.1.2 Breve história

Nos anos 60 acreditava-se que elaborar e desenvolver um SAD seria extremamente dispendioso e levaria muitos anos. Por volta dessa mesma época a IBM desenvolveu um sistema suficientemente poderoso, o “*IBM system 360*” (System 360, 2019), de organização de sistemas de informação que permitiu a inúmeros cientistas sonhar com o desenvolvimento real e aplicável de programas que auxiliassem a decisão. O sistema original da IBM focava-se em reportar periodicamente relatórios.

No final da década de 60, este conhecimento tornou-se prático. Foi no MIT (*Massachusetts Institute of Technology*), que Keen e Scott Morton aplicaram os primeiros

SAD, aprofundando o trabalho de dois pioneiros da área que já tinham o conceito desenvolvido e reivindicado (de estudos organizacionais de tomada de decisão) no final dos anos 50 na universidade de *Carnegie Institute of Technology* (Peter Keen e Charles Stabell).

A partir da década de 70, este conhecimento foi disperso pela publicação de trabalhos e pelos meios de comunicação disponíveis, fazendo com que, rapidamente, empresas a nível mundial comesçassem a utilizar, aos poucos, estes sistemas.

2.1.3 Desenvolvimento e aplicações

Na década de 1970 o estudo teórico e prático relacionado com sistemas de apoio à decisão eram discutidos nas mais variadas áreas académicas e conferências científicas. Em 1978 o livro de Keen e Scott Morton *“Decision Support Systems, A research perspective”* (Keen & Scott, 1980) foi lançado, providenciando uma primeira e ampla orientação dos SAD, a sua implementação, avaliação, análise e desenvolvimento. O livro começou a ser usado como alvo de estudo no âmbito académico e teve também grande influência na Europa.

A partir desse ano, o tema foi motivo de estudo e aprofundado por inúmeros estudos. De entre elas, foi notório o trabalho de Steven Alter (Alter, S.L, 1980), que categorizou os diferentes SAD e os estudou em termos aplicacionais, a sua utilização no âmbito empresarial de numa perspetiva de gestão.

De entre as categorias enumeradas por Alter, podemos salientar as seguintes:

- Sistema de armazenamento
- Sistema de análise de dados
- Sistema de análise de informação
- Sistema de modelos financeiros e económicos
- Sistema de modelos representativos
- Sistema de modelo de otimização
- Sistema de modelo de sugestão

Além das categorias definidas por Alter, anteriormente, os SAD já tinham sido divididos em três grandes grupos: SAD pessoal, SAD para grupos e SAD organizacional.

Foi em 1982 que no seu livro *“Building Effective Decision Support Systems”* que Ralph Sprague e Eric Carlson (Sprague & E. D. Carlson, 1982) aprofundaram o conhecimento de SAD aplicado a sistemas computadorizados. Providenciaram então um conhecimento prático de como as empresas deveriam construir e aplicar os SAD. No seu trabalho, os dois

cientistas definiram SAD como sendo “uma classe de sistema de informação que utiliza sistemas de processamento de transações e interage com as outras partes do sistema geral de informações para apoiar as atividades de tomada de decisão dos gerentes e outros trabalhadores do conhecimento nas organizações”.

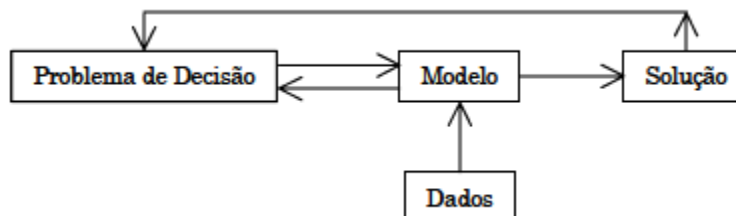


Figura 3 - Fluxograma de uso de modelos; Victor Lobo, 2009

Nos dias que correm, e tal como mencionado anteriormente, a par da evolução tecnológica, os sistemas de apoio à decisão são, a nível mundial, indispensáveis à prática de qualquer tipo de atividade. São usados casualmente no dia-a-dia sem nos apercebermos!

Alguns softwares genéricos atuais que perfazem as características de SAD e são conhecidos por todo o mundo e de fácil acesso são: Excel, SAS, SPSS, SAP, entre outros. Existem, no entanto, outro tipo de softwares vocacionados/direcionados para áreas mais específicas (seja de negócio/empresarial ou académica) (Decision Support System, 2019).

Na corrente desta dissertação será usado maioritariamente o Excel (usando a linguagem VBA) de forma a conseguir com maior precisão e com o menor erro possível (desperdícios), auxiliar os operadores da Lival na decisão do sequenciamento e posição dos cortes a fazer na tela de favo de cartão.

2.2 O problema do corte e empacotamento

2.2.1 Introdução

Neste capítulo são apresentadas, de forma genérica, algumas das questões mais comuns dos problemas de corte e empacotamento e uma revisão bibliográfica do métodos e soluções para resolução desses problemas. O capítulo inicia-se com uma classificação dos problemas de corte e empacotamento segundo as suas duas grandes tipologias. Os problemas de empacotamento, na sua forma geral, são aqueles que requerem que certos objetos, habitualmente designados itens, sejam empacotados noutros, de tamanhos maiores, usualmente designados por recipientes. Nalgumas aplicações, o objetivo em vez de ser empacotar é cortar. Refira-se que os itens devem ser empacotados sem sobreposição. Muito embora estes problemas sejam similares, as diferenças registam-se sempre que consideramos as diferentes restrições que podem para cada caso.

Estes problemas de têm sido amplamente estudados por via do seu grande interesse intrínseco, quer prático quer teórico. Algumas aplicações práticas são observáveis em problemas de corte de placas de cartão/vidro/esferovite, empacotamento em caixas, acomodação de eletrodomésticos/mobiliário/cerâmicas, entre outros. Relativamente a estes assuntos Dyckhoff (H. Dyckhoff, G. Scheithauer, and J. Terno, 1997), por exemplo, produziram uma extensa bibliografia devidamente fundamentada. Diversos artigos alusivos podem também ser observados nos trabalhos de Dyckhoff e Finke (Finke, H. Dyckhoff & U., 1992) e Dowsland e Dowsland (Dowsland, K. A. Dowsland & W. B., 1992). Também Lodi (Lodi, Andrea & Martello, Silvano & Monaci, Michele., 2002) desenvolveram um trabalho interessante relativo a problemas bidimensionais.

2.2.2 Estrutura dos Problemas de Corte e Empacotamento (C&P)

Todos os problemas de C&P possuem uma estrutura idêntica e podem ser descritos de forma análoga. Geralmente, eles têm dois conjuntos de objetos:

- um conjunto de objetos de grande dimensão, designados recipientes e
- um conjunto de objetos pequenos (menores que os recipientes) designados itens.

Estes conjuntos podem estar definidos numa, duas, três ou mais dimensões geométricas.

Os itens são agrupados e selecionados em conjuntos que são atribuídos aos recipientes de tal modo que:

- todos os itens agrupados num mesmo conjunto têm de ser inseridos no recipiente
- nenhum item poderá, de forma alguma, sobrepor-se a outro.

Anexa-se a esta estrutura, uma função objetiva a ser otimizada, como, por exemplo, um menor número de recipientes a usar ou uma menor perda de material.

Esta caracterização está na génese de todos os problemas de C&P.

As distinções entre os problemas poderão ter origem em diferentes propriedades adicionais solicitadas a cada tipo de problema. De acordo com Wäscher (G. Wäscher, H. Haußner, and H. Schumann, 2004) poder-se-ão distinguir cinco sub-problemas:

1. Problema da seleção dos recipientes;
2. Problema da seleção dos itens;
3. Problema do agrupamento dos itens selecionados;
4. Problema da atribuição dos conjuntos de itens aos recipientes (afetação);
5. Problema de layout relativo à disposição dos itens nos recipientes de acordo com as imposições geométricas.

O primeiro, refere-se, diretamente, aos recipientes utilizados. Como exemplo, podemos falar de certos tipos de recipientes que, podendo ser mais caros na sua manufatura, geram um menor desperdício, podendo, assim, ter preferência no corte; O segundo refere-se aos itens nos quais, alguns deles, poderão ter prioridade na produção, por exemplo. Refira-se que alguns itens não devem ser empacotados juntos, tais como produtos químicos ou produtos alimentares; o terceiro refere-se, especificamente, a essas considerações. Determinados itens só podem ser afetados a localizações específicas, como p.ex. carga de veículos de transporte ou corte de itens de diversos materiais; o quarto considera estas observações. Por fim, o quinto leva em linha de conta restrições como tipo de corte, por exemplo, ou disposição num contentor de carga.

Também Dyckhoff (Dyckhoff, Harald, 1990) apresentou uma classificação para os problemas de C&P, que, mais tarde se veio a demonstrar ser incompleta na descrição dos problemas. Essa classificação é baseada em quatro pontos:

1. Dimensionalidade (figura 4):

- 1 - Uma dimensão;
- 2 - Duas dimensões;
- 3 - Três dimensões;
- N - N dimensões, com $N > 3$;

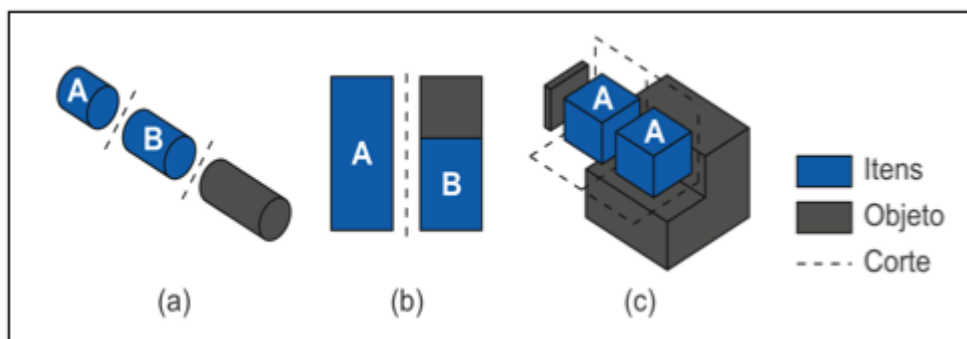


Figura 4 - Corte Uni (a), Bi (b) e Tridimensional (c) (Revista ESPACIOS; Vol 36 (nº09); 2015)

2. Tipo de atribuição:

- A - todos os recipientes e uma seleção de itens;
- B - todos os itens e uma seleção de recipientes;

3. Tipo dos recipientes:

- I - Um recipiente;
- II - figuras idênticas;
- III - figuras diferentes;

4. Tipo dos itens (figura 5):

- a - Poucos itens (de diferentes formas);
- b - Muitos itens com muitas formas diferentes;
- c - Muitos itens com poucas formas diferentes;
- d - Formas iguais.

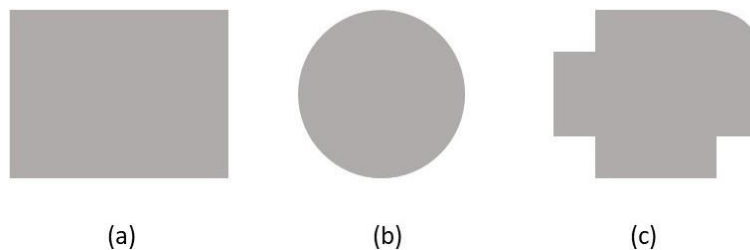


Figura 5 - Formas regulares (a,b) e irregular (c); Autor, 2020

Porém, segundo Wäscher (Wäscher G., Haußner H., & Schumann H, 2007) esta classificação está inquinada por algumas falhas! Estes autores propuseram extensões da classificação de Dyckhoff precisando de forma mais apurada as variações de cada tipo de problema. A classificação básica pode ser vista na Figura 6. Wäscher *et al*, nas descrições dos seus trabalhos propuseram ainda um refinamento destas categorias básicas. Para além desta classificação, é também normal identificar um problema de C&P recorrendo às restrições envolvidas. Em geral, nos problemas de corte os itens têm associadas solicitações, ou seja, vários itens de um determinado tipo podem ser solicitados, enquanto que nos problemas de empacotamento estas necessidades são unitárias.

A estabilidade, p.ex., é uma das restrições mais comuns aos problemas de empacotamento no que à disposição dos itens se refere. Já nos problemas de corte, usualmente, as restrições envolvidas referem-se ao tipo de corte que é feito ou ao desperdício de material dos recipientes. Entretanto é possível que várias destas características se sobreponham num determinado tipo de problema, tornando-o híbrido. O trabalho de Wäscher procura fazer a caracterização de vários destes problemas e de algumas de suas sobreposições.

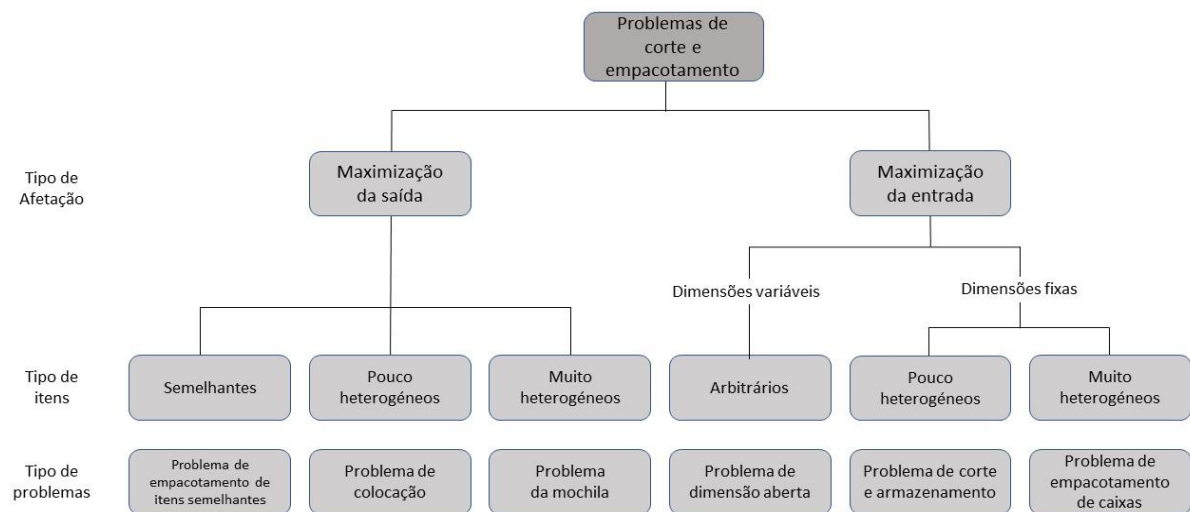


Figura 6 - Tipos básicos de problemas de corte e empacotamento, adaptada de Wäscher et al, 2004

2.2.3 Problemas Unidimensionais

Diz-se que um problema é unidimensional quando apenas uma dimensão é considerada no processo. Um dos mais famosos e, possivelmente, o primeiro dos problemas de corte e empacotamento unidimensional é conhecido como Problema da Mochila (do inglês *Knapsack Problem*). Uma possível explicação desta questão poderá ser a seguinte: imaginemos um vendedor ambulante que necessita levar mercadorias na sua mochila. O problema é que a mochila tem uma capacidade limitada e não consegue acomodar todos os itens disponíveis. O vendedor vai procurar encher a sua mochila de forma a que a soma dos valores dos itens seja o mais elevada possível. Um outro exemplo poderá ser o seguinte: um investidor tem um determinado capital e quer investir em ações no mercado. Cada ação tem atribuído um valor para compra e um índice de rentabilidade. Assim, o objetivo do investidor é capitalizar a soma dos índices de rentabilidade das ações que comprar, limitadas ao capital que tem para investir.

Podemos assumir como sua definição formal, a seguinte:

PROBLEMA DA MOCHILA

Seja um recipiente de capacidade C e uma lista de itens unidimensionais $I \in \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ tal que cada item r_i tem um peso associado $p_i \in [0, C]$ e um valor associado v_i , com $i = 1, \dots, n$. O objetivo é empacotar alguns itens do conjunto I no recipiente de tal maneira que a soma dos pesos dos itens empacotados não ultrapasse a capacidade C e a soma dos valores seja a maior possível.

A este problema também se dá o nome de Problema da Mochila Binário ou 0-1 e é NP-difícil, ver Garey e Johnson (Johnson, 1979). O problema da mochila tem uma grande importância pois aparece como subproblema de muitos outros problemas mais complexos, e pode representar muitas situações práticas, como nos dois exemplos antes citados. É, por isso, considerado como um dos problemas preponderantes dos processos de empacotamento. Em termos de programação linear inteira, poderá ser formulado como:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar} && \sum_{i \in I} x_i \\ &&& (5.1) \\ &\text{com as restrições} && \sum_{i \in I} p_i x_i \leq C \quad x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, \end{aligned}$$

onde x_i é um vetor binário de tamanho $\#I$, e cada posição i indica se o item r_i está ou não na solução. A restrição desta fórmula, que envolve a capacidade do recipiente, surge em vários problemas de C&P, ainda que de uma forma ligeiramente alterada.

Um outro problema, também comum refere-se ao empacotamento de uma lista de itens em diversos recipientes.

A este tipo de problema dá-se o nome de Problema de Empacotamento Unidimensional (*Bin Packing Problem*):

PROBLEMA DE EMPACOTAMENTO UNIDIMENSIONAL - PEU

Dados recipientes de capacidade C e uma lista de itens unidimensionais $I \in \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, tal que cada item r_i tem um peso associado $p_i \in [0, C]$, o objetivo é empacotar os itens do conjunto I dentro do menor número de recipientes, de modo que a soma dos pesos dos itens em cada recipiente não exceda sua capacidade.

O PEU é, também, NP-difícil: ver Garey e Johnson (Johnson, 1979). Uma variante do PEU acontece quando os itens têm solicitações $d_i \in \mathbb{Z}^+$, com $i = 1, \dots, n$ associadas. O problema é conhecido como Problema de Corte Unidimensional (*Cutting Stock Problem*).

PROBLEMA DE CORTE UNIDIMENSIONAL - PCU

Dados recipientes de capacidade C e uma lista de itens unidimensionais $I \in \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ tal que cada item r_i tem um peso associado $p_i \in [0, C]$ e seja $d_i \in \mathbb{Z}^+$, a necessidade de cada um dos itens r_i com $i = 1, \dots, n$, o objetivo é empacotar todos os itens associados, dentro do menor número de recipientes.

Na realidade, quando temos solicitações de itens tratamos os problemas como problemas de corte. Porém, quando os itens são unitários, tratamo-los como problemas de empacotamento. A Figura 7 mostra um exemplo onde temos solicitações de barras de vários tamanhos sendo que a matéria prima tem dimensão fixa. Podemos, assim, minimizar a utilização de matéria prima consumida, ou o desperdício no corte.

Na verdade, existe uma infinidade de variações nos problemas unidimensionais. Destas, o problema da mochila, o PEU e o PCU são os mais estudados, uma vez que estes se apresentam como subproblemas em diversos outros problemas correntes.

2.2.4 Problemas Bidimensionais

No caso de problemas bidimensionais são consideradas duas dimensões para a resolução. A título de exemplo, imagine-se uma vidraria que recebe uma grande encomenda de pequenas peças planas de vidro de vários tamanhos. Normalmente a vidraria trabalha com matéria prima constituída por placas de grandes dimensões. O objetivo é obter, por corte, peças menores a partir das placas de grande dimensão, de tal modo que se utilize ou desperdice a menor quantidade possível de matéria prima.

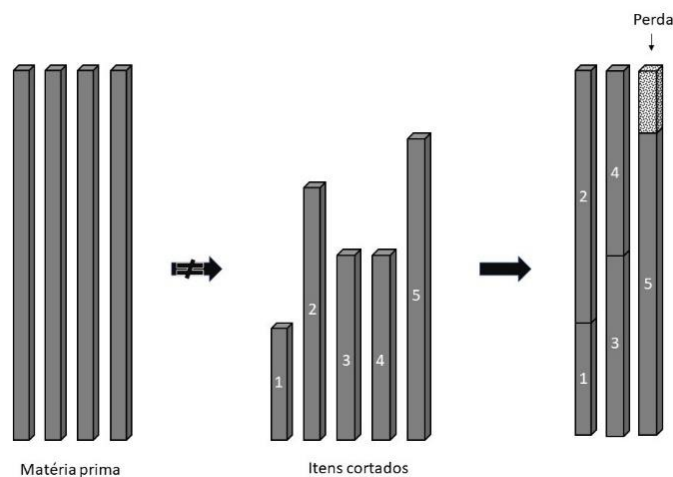


Figura 7 - Corte de Barras - exemplo de corte interpretado como PCU; Autor, 2020

Os problemas com duas, ou mais dimensões, apresentam vários tipos de empacotamento.

A Figura 8 mostra dois exemplos comuns de empacotamentos. O empacotamento (b), embora os itens sejam figuras regulares, seus lados não estão alinhados com as margens do recipiente. No empacotamento (a) os lados dos itens estão alinhados.

Neste último tipo é dito ser ortogonal, ou seja, os lados dos itens são paralelos ou ortogonais aos lados dos recipientes.

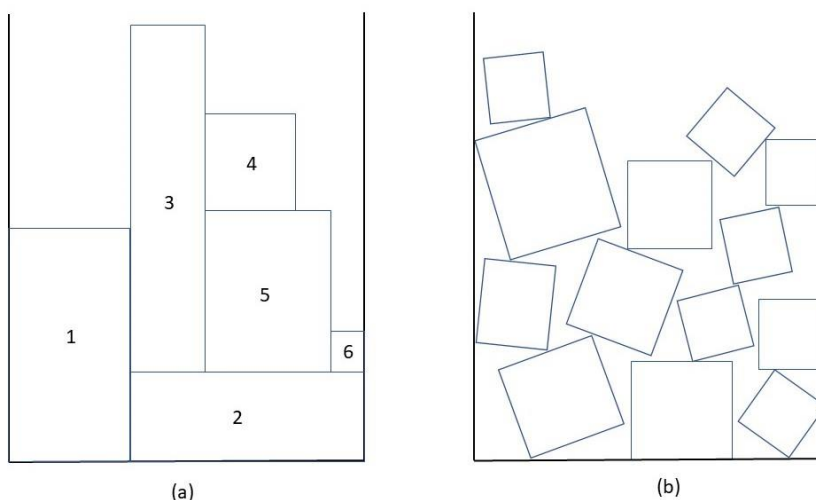


Figura 8 - Exemplos de empacotamento: (a) ortogonal; (b) não-ortogonal; Autor, 2020

Correntemente, os problemas que exigem ortogonalidade são mais comuns quando os itens e recipientes são figuras retangulares, uma vez que o esforço para resolução destes problemas é menor. Nesta dissertação, consideramos apenas empacotamentos ortogonais.

Outro problema comum é o Problema de Empacotamento Bidimensional (*Two Dimensional Bin Packing Problem*), cujo exemplo pode ser visto no início desta secção.

PROBLEMA DE EMPACOTAMENTO BIDIMENSIONAL - PEB

Dadas placas bidimensionais R de dimensões L e A e uma conjunto de retângulos $I \in \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, onde cada retângulo $r_i = (l_i, a_i)$ tem dimensões l_i e a_i tal que $l_i \in [0, L]$ e $a_i \in [0, A]$, para $i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$, o objetivo é empacotar os retângulos do conjunto I dentro do menor número de placas R .

Claramente o PEB é NP-difícil, já que o PEU se reduz facilmente a ele. Basta adicionarmos mais uma dimensão de tamanho fixo e igual em todos recipientes e itens.

Assim como sua versão unidimensional, o PEB tem uma variação onde os itens têm solicitações $d_i \in \mathbb{Z}^+$, com $i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$ associadas. Este problema é conhecido como Problema de Corte Bidimensional em Placas (*Two Dimensional Cutting Stock Problem*).

PROBLEMA DE CORTE BIDIMENSIONAL EM PLACAS - PCB

Dadas placas bidimensionais R de dimensões L e A , e uma lista de retângulo $I \in \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, onde cada retângulo $r_i = (l_i, a_i)$ é tal que $l_i \in [0, L]$ e $a_i \in [0, A]$, e seja $d_i \in \mathbb{Z}^+$, a necessidade de cada um dos itens r_i com $i = 1, \dots, n$, o objetivo é empacotar toda a procura de itens dentro do menor número de placas R .

O PCB é um tipo de problema extremamente comum na indústria. Imaginem-se grandes placas de vidro ou metal que devem ser cortadas em itens menores, para responder às solicitações de diversos clientes. Nesses casos, podemos nos preocupar apenas com a quantidade de placas a serem cortadas, já que as sub-placas sobrantes do primeiro corte poderão ser recicladas. Porém, noutro tipo de indústrias, como a do mobiliário de madeira, as sobras são mais difíceis de serem recicladas; daí, ter-se mais preocupação com o desperdício no corte.

Ambos PEB e PCB tem recipientes com as duas dimensões bem definidas. Existem problemas onde o tamanho do recipiente numa das dimensões é ilimitado. Imagine-se uma grande bobina de papel, como na Figura 9, que deve ser cortada em retângulos (itens) menores. A sua largura, geralmente, é bem definida, mas sua altura pode ser considerada infinita, pois a soma das alturas dos itens a serem cortados é muito menor que a altura da faixa. Esse problema é conhecido como Problema de Empacotamento Bidimensional em Faixas (*Two Dimensional Strip Packing Problem*) e tem aplicação direta nesta dissertação. A sua definição poderá ser:

PROBLEMA DE EMPACOTAMENTO BIDIMENSIONAL EM FAIXAS - PEBF

Seja S uma faixa de largura L e comprimento infinito e uma lista de recortes (itens) retangulares $I \in \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ onde cada recorte $r_i = (l_i, a_i)$ é tal que $l_i \in [0, L]$, para $i=1, \dots, n$, l_i é a largura e a_i é o comprimento do recorte r_i . O objetivo é empacotar os itens de I em S com a minimizando o comprimento da faixa a utilizar.

O PEBF é muito comum na indústria metalúrgica, dos polímeros e, essencialmente, do papel. Atendendo a essa grande importância, este trabalho visou a resolução do problema, de forma exata.

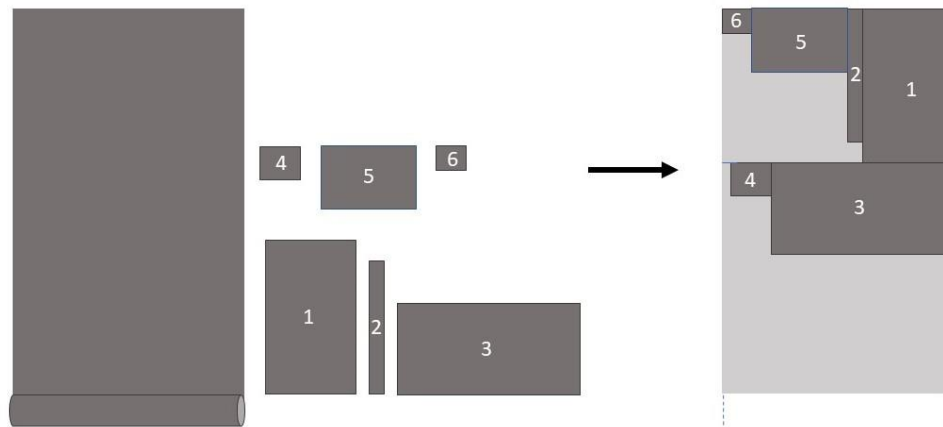


Figura 9 - Exemplo de corte de uma bobina de papel. Autor, 2020

2.2.5 Problemas com mais de duas dimensões e variações no corte e empacotamento

Finalmente, existe outro tipo de problemas de empacotamento, habitualmente denominados tridimensionais, que são também comuns. Imaginemos cargas de contentores marítimos, cargas em contentores para veículos pesados ou arrumação em armazéns. Problemas de corte são mais raros, mas podemos imaginá-los no fabrico de peças metálicas, corte de madeira na indústria do mobiliário, com diversos fins específicos, corte de espumas para colchões, entre outros. O problema só é considerado tridimensional se as três dimensões são relevantes ao processo de empacotamento. Por outro lado, existem problemas que podem ser modelados com mais de três dimensões, p.ex., três dimensões físicas e o tempo. A título de exemplo, a afetação de tarefas num determinado processo produtivo, poderá ser modelada como um problema de empacotamento de mais de três dimensões.

Modelos genéricos para problemas de empacotamento de várias dimensões foram sugeridos por Fekete e Schepers [E, F, G], utilizando uma caracterização com base na teoria dos grafos das soluções viáveis. Estes autores apresentaram, também, os fatores limitantes e um algoritmo exato associados a esta abordagem.

Assim, além da dimensionalidade, os problemas de C&P revelam uma grande diversidade quer quanto ao género dos recipientes e itens, quer quanto ao tipo de empacotamento propriamente dito. Na secção anterior, já definimos dois tipos de empacotamento: o empacotamento ortogonal, onde os lados dos itens são paralelos ou

ortogonais aos lados dos recipientes, e o empacotamento não-ortogonal onde esse fator não é uma restrição. A Figura 8 mostra dois exemplos deste último.

O empacotamento também pode ser constituído por itens com formas diversas, tais como itens côncavos, itens com lados não regulares ou, ainda, itens com formas não poligonais. Noutros problemas, é permitido que se mude a orientação do item, ou seja, que se rode o item de modo a otimizar o espaço do empacotamento. O Problema de Carregamento de Paletes/Estrados (*Pallet Loading Problem*) pode ser um exemplo de um problema com estas características.

Uma outra consideração muito relevante, na indústria, é a de como os cortes são efetuados. O mais comum é o dispositivo de corte operar somente de forma longitudinal ou paralela aos lados do recipiente, cortando a matéria prima de uma ponta à outra. Este tipo de corte é conhecido como corte guilhotinável. A Figura 10 mostra-nos exemplos de três tipos de cortes. O tipo de corte (a) permite que a guilhotina seja utilizada trocando a orientação da mesma em cada corte (H. Dyckhoff, G. Scheithauer, and J. Terno, 1997). Numa primeira fase, o item 1 é cortado, em seguida 2, 3, 4 ou 6, e, finalmente o 5, num total de 4 ou 5 mudanças de direção da guilhotina.

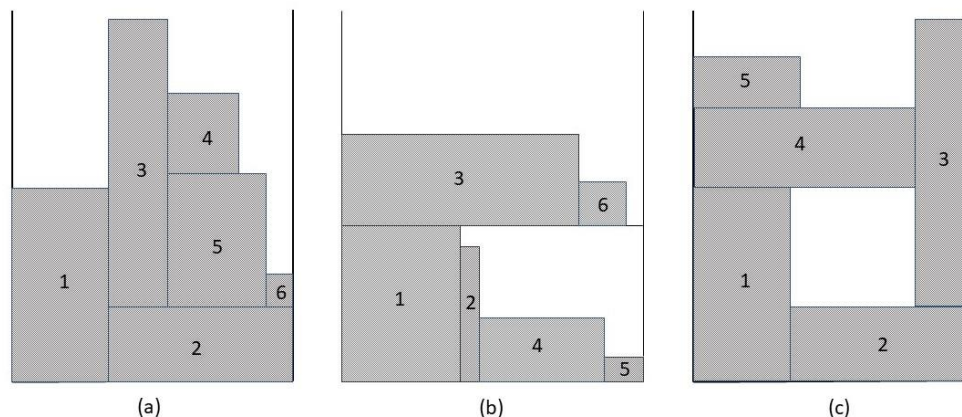


Figura 10 - (a) Corte guilhotinável; (b) Corte guilhotinável com 2 estágios; (c) Corte não-guilhotinável. Autor, 2020

No entanto, se o custo da mudança de direção é muito alto, pode-se restringir este, resultando num número máximo de estágios de corte. Cada estágio de corte representa uma mudança na direção da guilhotina e uma sequência de cortes. Em (b), temos um estágio horizontal, que separa os itens 1, 2, 5 e 6 dos itens 3 e 4, e, em seguida, um estágio vertical que separa os 1, 2, 5 e 6 uns dos outros, e os itens 3 e 4 um do outro. Registe-se que é necessário mais um estágio para o corte das sobras. Este estágio, geralmente, não é contabilizado como estágio de corte. Em (c) é impossível utilizar uma guilhotina, exceto para o recorte do item 5. A disposição, na placa, dos itens 1, 2, 3 e 4 impedem que a guilhotina corte o material de uma ponta à outra.

Refira-se que os cortes guilhotináveis em estágios são os mais comuns na indústria (particularmente na do cartão) devido o intenso uso de guilhotinas. Considerando o corte da bobina de papel, onde os itens têm uma solicitação unitária, podemos designá-lo de Problema de Empacotamento Bidimensional em Faixas com 2 Estágios PEBF2. A Figura 10 mostra um exemplo deste tipo de empacotamento.

Para efeitos de nomenclatura, consideramos o número depois da sigla de um problema como o número de estágios requeridos para o corte. Por exemplo, PEB2 e PEBF2 são versões do PEB e o PEBF, respectivamente, que implicam que os cortes sejam feitos em 2 estágios.

Podemos, ainda, referir outras restrições comuns que são as relativas à diversidade dos itens e ao seu gênero. Imaginemos uma carga de veículos pesados com produtos alimentares e de limpeza. Estes produtos, usualmente, não devem ser empacotados juntos por questões de contaminação. Outra situação poderá ser o empilhamento de itens. Determinados materiais não podem ser sobrepostos a outros o que implica muita atenção e cuidado com a ordem de empacotamento.

Obviamente, a maior parte destas restrições têm influência direta nos algoritmos utilizados para a resolução dos respectivos problemas como veremos adiante.

2.2.6 Strip Packing

O *Strip Packing Problem* (SPP) visa acondicionar um conjunto de pequenos itens dentro de um objeto maior, no nosso caso a tela de papel, com todas as dimensões exceto uma fixa, com o objetivo de minimizar as “dimensões livres” (perdas = desperdícios) no objeto original e que, de acordo com a tipologia preconizada por (Wäscher G., Haußner H., & Schumann H, 2007) é classificado como problema de corte e empacotamento.

Este tipo de problemas, de larguíssima aplicabilidade em múltiplos setores da indústria e mesmo da atividade humana em geral, pode ser caracterizado não apenas pela dimensionalidade do problema e pela sua (nesta nossa pesquisa, problemas bidimensionais em que os itens pequenos são retângulos serão os abordados), mas outras características sobre a forma como os retângulos são dispostos na tela pode ser considerado para a categorização do problema. A disposição real de pequenos itens retangulares numa tela de cartão refere-se como padrão (corte ou embalagem padrão) ou “layout”. As características que podem ser impostas aos padrões virão a surgir das restrições práticas (Mitsutoshi KENMOCHI, Takashi IMAMICHI, Koji NONOBE, Mutsunori YAGIURA, Hiroshi NAGAMOCHI,

2007) que os diferentes aplicativos exigidos no mundo real (no presente caso: dimensões e formas das caixas de cartão).

De um ponto de vista geral, nos problemas SPP são definidos dois grandes parâmetros de entrada: o número total de itens retangulares, T_r e a largura da tela, H . Cada um dos itens retangulares, i com $i = 1, \dots, T_r$ é caracterizado pelo comprimento w_i , e pela largura, h_i com $0 < h_i < H$. O objetivo na corrente dissertação é encontrar a melhor disposição possível dos retângulos que minimize o comprimento total final da tela. Os retângulos devem ficar dispostos de forma a que estejam paralelos com os limites da tela e que não haja sobreposição entre os mesmos.

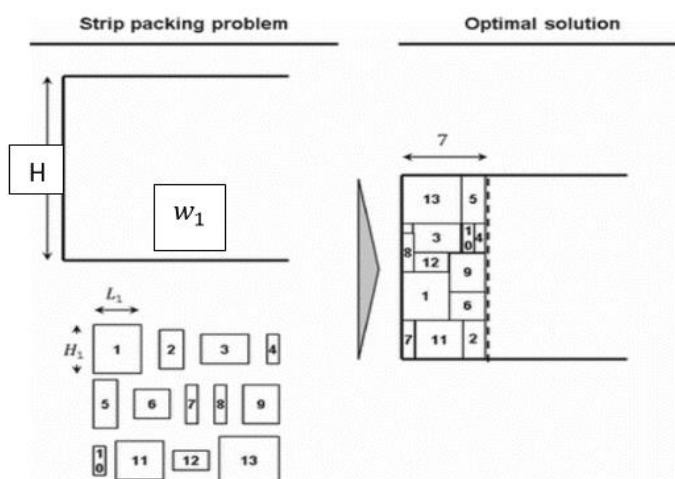


Figura 11 - Strip Packing; Ignacio E. Grossman, 2017

Na figura 11 podemos visualizar uma fase inicial do problema atento neste capítulo e o resultado final aquando resolução do mesmo.

No nosso caso deveremos definir, uma vez que todas as características dos retângulos são conhecidas com antecedência, as restrições necessárias para otimizar o processo. Além das que já foram mencionadas anteriormente, implementamos também a opção de rotação para maximizar o número de opções finais de posicionamento de forma a cumprir o objetivo final.

Por outro lado, em contextos práticos de SPP a questão põe-se com pequenos itens com formas irregulares (por exemplo, polígonos), formas circulares ou formas retangulares, que são o foco desta dissertação. Diretamente relacionado com a geometria está ortogonalidade. Nos padrões ortogonais, as bordas dos retângulos a obter, são paralelas às bordas da fita original, como se compreende.

Definimos portanto, para um problema SPP o seguinte modelo (Mitsutoshi KENMOCHI, Takashi IMAMICHI, Koji NONOBE, Mutsunori YAGIURA, Hiroshi NAGAMOCHI, 2007), designando o canto inferior esquerdo da tela como a origem do plano XOY . O eixo das abcissas na direção do comprimento da tela e da largura o eixo das ordenadas. A localização de cada um dos retângulos $i, i = 1, \dots, T_r$ na tela será identificada pelas coordenada (x_i, y_i) do canto esquerdo inferior.

Minimizar W

Sujeito a

$$\begin{aligned} x_i + w_i &\leq W; \quad \forall i = 1, \dots, T_r \\ y_i + h_i &\leq H; \quad \forall i = 1, \dots, T_r \\ x_i + w_i &\leq x_j \vee x_j + w_j \leq x_i \\ y_i + h_i &\leq y_j \vee y_j + h_j \leq y_i; \quad \forall i, j = 1, \dots, T_r \text{ e } i \neq j \\ x_i, y_i &\geq 0, \forall i = 1, \dots, T_r \end{aligned}$$

No modelo apresentado o primeiro e segundo grupo de restrições servem para manter todos os retângulos com posicionamento no interior da tela de cartão. As restantes restrições garantem a não sobreposição dos retângulos.

2.3 Alguns métodos de resolução de problemas de corte e empacotamento

Para todos e quaisquer problemas ou questões, existem métodos de resolução para os mesmos de forma a os solucionar.

No corrente capítulo abordamos, de forma a perceber quais os métodos de resolução do problema da dissertação disponíveis, métodos heurísticos e modelos matemáticos de forma a abordar os problemas descritos no capítulo anterior.

2.3.1 Modelos matemáticos

No corrente subcapítulo serão abordados os métodos de resolução de problemas de corte bidimensional não guilhotinado utilizando algoritmos exatos, sendo que estes serão utilizados na resolução do problema em questão ao invés de métodos heurísticos.

Algoritmos exatos são os modelos matemático que estão na base de todas as heurísticas e têm com principal objetivo a busca incessante de um valor ótimo, sendo que as heurísticas são derivações adaptadas dos mesmos.

O problema de corte apresentado pretende otimizar o corte de uma tela de cartão sem fim nas formas retangulares necessárias a perfazer as encomendas de caixas apresentadas à empresa.

Problemas de corte foram introduzidos por Gilmore e Gomory (GILMORE, P & GOMORY, 1965) e consistem na procura da melhor forma de obter peças de dimensão inferior a partir de uma peça original com maior dimensão, respeitando determinadas restrições e o otimizando o espaço disponível evitando assim desperdícios.

Na corrente dissertação, o alvo de estudo são os cortes bidimensionais.

O corte guilhotinado pressupõe que um retângulo dá origem a dois. Neste caso, sendo as formas dos retângulos diferentes, haverá restrições em relação a quais peças poderão ser cortadas depois do primeiro e do segundo corte, e assim sucessivamente, limitando o conjunto de peças que poderão ser cortadas, se essas peças forem de tamanhos diferentes.

O problema apresentado consiste na otimização de uma região admissível. Será apresentada uma Função Objetivo (FO) onde se maximizará ou minimizará a mesma dependendo do objetivo.

MIN ou MAX de $f(x)$

Sendo $f(x)$ a função objetivo que pretendemos minimizar (sendo o problema em questão formalizado para minimizar desperdícios) e X a região admissível utilizada.

Neste tipo de problemas, a definição de todas as propriedades envolvidas é de extrema importância visto que o resultado está diretamente relacionado com as mesmas. São eles:

- Objetivos
- Variáveis
- Parâmetros de entrada
- Modo de resolução
- Padrão

2.3.2 Programação linear

Programação linear (PL) é uma área de conhecimento que foi criada durante a segunda guerra mundial cujo intuito é a diminuição de custos e o aumento de rentabilidade. Foi criado pelo exército americano para resolução de problemas de recursos limitados, de forma a otimizar objetivos e resolver problemas estratégicos e táticos.

Atualmente estes procedimentos são usados nos mais diversos setores industriais, assim como militares e governamentais.

De entre os membros da equipa de pesquisa de nome SCOOP (*Scientific Computation of Optimun Program*) que formulou inicialmente o problema de programação linear (PL) distingue-se George B. Dantzing (Dantzig, George Bernard, 1998), considerado o “pai” da programação linear que em 1947 inventou o Método *simplex*; Este método sofre um processo iterativo em que a solução é melhorada em cada iteração feita, e fica finalizado quando já não for possível a iteração dos mesmos. A sua função objetivo pode seguir a finalidade de minimizar ou maximizar seguindo as respetivas restrições.

Segundo Pierre J. Ehlich (Ehlich, 2004), de uma forma simplista, são importantes para o desempenho de um modelo matemático de PL os seguintes elementos:

- Variáveis de decisão
- Recursos escassos ou elementos restritivos
- Coeficientes tecnológicos
- Equações de restrição
- Os benefícios ou prejuízos a serem utilizados na função objetivo
- Função objetivo

A estrutura é padronizada e repetitiva para os mais diversos problemas. Esta característica permitiu o desenvolvimento de aplicações informáticas e tornar todo o processo mais rápido e eficiente, bem como tornar o processo de tomada de decisões mais sóbrio e intuitivo na utilização.

Na obra de Goldbarg (Goldbarg, Marco, 2000), são mencionadas características sobre as quais os modelos de PL devem incidir. Entre elas deve-se ter em conta a proporcionalidade, ou seja, quantidades de recursos consumidos devem-se manter homogêneos durante todo o processo; a não negatividade: devem ser sempre utilizados valores positivos; aditividade: manter o equilíbrio das equações (custo total deve ser a soma de todas as atividades); divisibilidade.

2.3.3 Heurísticas

Os métodos baseados em algoritmos heurísticos têm na sua origem problemas de uma complexidade e dinâmica que, apesar de poderem ser resolvidos por modelos matemáticos tradicionais/exatos, encaminham-se em menos tempo e apresentam uma solução aproximada. Não garantem, assim, uma solução ótima para o problema em estudo.

Heurísticas são definidas como conjuntos de regras e métodos que levam à resolução de problemas, normalmente tendo como base dados históricos ou uma ideia. Tipicamente não apresentam um limite formal de qualidade e podem ser avaliadas com uma complexidade média (em contraste com os modelos matemáticos tradicionais), assim como a qualidade da sua solução.

Geralmente, os métodos heurísticos, não requerem, obrigatoriamente, especialização no domínio das aplicações informáticas. Apesar do objetivo ser sempre uma solução ótima, estes métodos baseiam-se em consequentes iterações e aproximações desse mesmo objetivo, fazendo com que a solução, apesar de não ser perfeita/exata, seja admissível (exequível segundo os padrões pré-estabelecidos).

Dentro do universo de modelos heurísticos são tidas em conta duas grandes dimensões.

São elas: o tempo e a otimização. Se forem tidas em conta estas duas grandes dimensões, os métodos heurísticos dividem-se, maioritariamente, em duas grandes categorias:

- Heurísticas
- Meta heurísticas

À semelhança dos métodos heurísticos, também os métodos meta-heurísticos procuram a resolução dos problemas de forma rápida, sendo uma meta-heurística uma heurística que é aplicada a uma outra heurística. A grande diferença entre os dois é na solução, sendo que, nos métodos meta-heurísticos a solução é vista como foco principal (máxima aproximação da mesma) e não tanto o tempo (minimização do mesmo). Para este efeito, utilizam restrições nas suas variáveis/parâmetros e socorrem-se, normalmente, de dados históricos.

MODELOS MATEMÁTICOS PARA POSICIONAMENTO DE ITENS

3.1 Modelos Matemáticos para posicionamento de itens retangulares e ortogonais

3.2 Resultados Computacionais

3. MODELOS MATEMÁTICOS PARA POSICIONAMENTO DE ITENS

3.1 Modelos Matemáticos para posicionamento de itens retangulares e ortogonais

No corrente capítulo abordam-se dois métodos de resolução para o problema da dissertação. Um modelo utilizando retângulos e um segundo utilizando polígonos ortogonais.

Desta forma poderemos aferir e comparar resultados para obter o melhor resultado possível e dar á empresa uma opção de escolha de método a utilizar.

3.1.1 Posicionamento de Retângulos

Numa primeira fase do problema matemático apresentado na corrente dissertação, foi analisado o problema em questão usando retângulos, sabendo, no entanto, que a forma final utilizada até ao momento pela empresa são polígonos ortogonais como exemplificado na figura 12.

Foi estudado o uso de retângulos como potencial solução do problema de forma a comparar, em termos de desperdícios, o uso de retângulos e o uso de polígonos ortogonais.

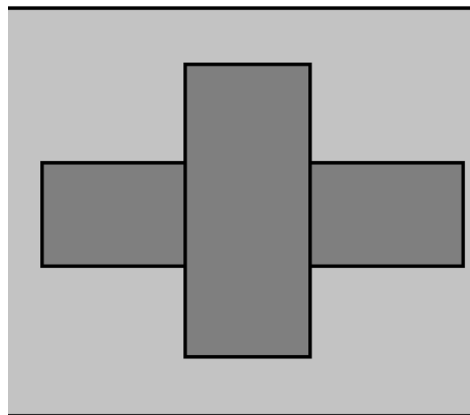


Figura 12 - Polígono Ortogonal usado pela Lival; Autor, 2020

De forma a conseguir uma otimização do espaço disponível, foi analisada a relação entre esse mesmo espaço e a disposição que as peças requeridas terão num plano de corte final.

Apresenta-se nas tabelas em baixo, uma breve descrição das variáveis e parâmetros utilizados no modelo para uma leitura mais simples e de mais acessível percepção.

Tabela 1 - Parâmetros de entrada

Parâmetros	Descrição
M	Constante suficientemente grande
H	Altura da tela
T_r	Número total de retângulos
w_i	Comprimento da peça i
h_i	Altura da peça i
$i \in \{1, 2, \dots, T_r\}$	

Neste caso houve necessidade de definir as coordenadas do canto inferior esquerdo da tela que são representadas por (W_e, H_e) muitas vezes opta-se por estas coincidirem com a origem do plano XOY .

Tabela 2 - Variáveis a aplicar em modelo de retângulos

Variáveis	Descrição
x_i^C	Abcissa da posição final do centro da peça i
y_i^C	Ordenada da posição final do centro da peça i
w_i^F	Comprimento final da peça i
h_i^F	Altura final da peça i
v_i	Variável binária que indica se a peça i foi ou não rodada
r_{ij}	Variável binária que indica se a peça i está ou não à esquerda da peça j
u_{ij}	Variável binária que indica se a peça i está ou não abaixo da peça j
$i, j \in \{1, 2, \dots, T_r\}$	

Num plano de corte genérico sabe-se que todos os retângulos integrantes na solução final têm a obrigação de se encontrar dentro dos limites da região admissível, tal como podemos observar no exemplo da figura 13, ou seja, as peças finais não podem ter uma altura maior que a altura da tela e a diferença entre o centro da peça e metade da tela analisada também não podem ser superiores á altura da tela.

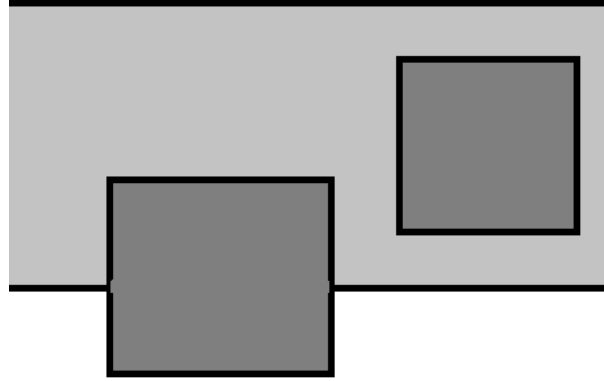


Figura 13- Quadrados relativos a tela; Autor, 2020

Estas condições foram inicialmente analisadas para casos em que a solução integrante apenas visava o uso de retângulos simples, sendo posteriormente, na solução final apresentada, estudado o caso de polígonos ortogonais, sendo que, tal como referido anteriormente estas são as formas usadas pela empresa.

Pode-se então definir, a título de exemplo, um retângulo i e definir as restrições que se acabam de mencionar no modelo apresentado em baixo em que as coordenadas do centro desse retângulo (x_i^C e y_i^C) não podem sobrepor os limites da região admissível (W e H).

Apresentamos então a diferença entre as coordenadas do retângulo relativamente à tela e a altura do retângulo têm sempre de ser menores que a altura total da tela (H), bem como ao seu comprimento (W) como podemos rever na figura 14.

$$\begin{aligned} x_i^C - 0.5w_i^F &\geq W_e; \quad \forall i = 1, \dots, T_r \\ x_i^C + 0.5w_i^F &\leq W; \quad \forall i = 1, \dots, T_r \\ y_i^C - 0.5h_i^F &\geq H_e; \quad \forall i = 1, \dots, T_r \\ y_i^C + 0.5h_i^F &\leq H; \quad \forall i = 1, \dots, T_r \end{aligned}$$

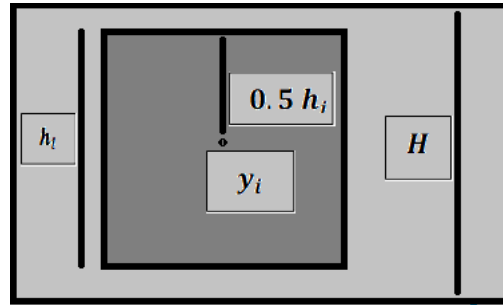


Figura 14 - Posição relativa em Y; Autor, 2020

Numa fase posterior de análise e desenvolvimento do modelo matemático é admitido que, de forma a ser o máximo dinâmico e se adaptar o melhor possível ao espaço disponível, os retângulos possam adotar posições diferentes consoante o ângulo de rotação que adotem.

Para efeitos de cálculo assume-se que as rotações possíveis dos retângulos são respetivamente 0^0 , 90^0 . Podemos rever as posições possíveis na figura 15.

As restrições que garantem que os retângulos mantem as suas características, quando são rodados, são as seguintes e em que existem duas opções possíveis: w_i mantém a sua posição inicial, ou $w_i^F = w_i$ e $h_i^F = h_i$ caso $v_i = 0$ não há rotação da peça, se $v_i = 1$ a variável binária indica que a peça i foi rodada passando-se a ter $w_i^F = h_i$ e $h_i^F = w_i$.

$$\begin{aligned} w_i^F &= (1 - v_i) \cdot w_i + v_i \cdot h_i; & \forall i = 1, \dots, T_r \\ h_i^F &= (1 - v_i) \cdot h_i + v_i \cdot w_i; & \forall i = 1, \dots, T_r \end{aligned}$$

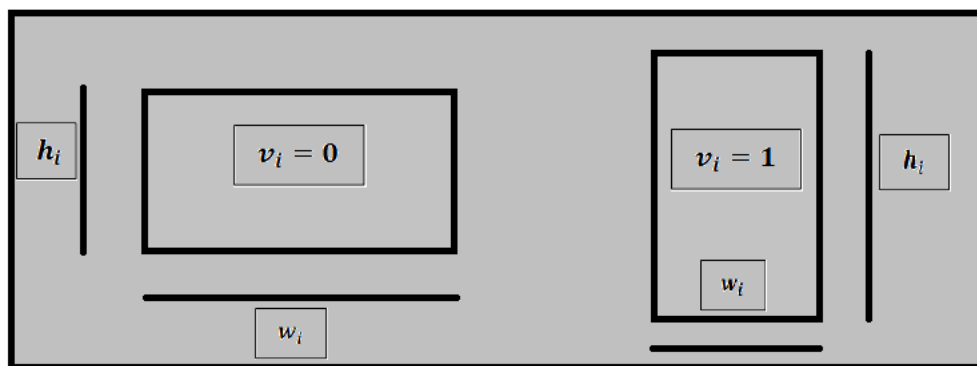


Figura 15 - Rotação de quadrado simples; Autor, 2020

Sendo a empresa Lival uma empresa com um amplo leque de produtos, os produtos finais requeridos apresentam diferentes tamanhos.

É então necessário adotar medidas para que, todos os produtos requeridos, diferentes entre si, não se sobreponham nunca, para assim manter a integridade das mesmas. Nesta fase, de forma a melhor perceber o modelo desenvolvido, serão abordados pares de itens retangulares (sendo objetivo final pares de itens ortogonais).

Assumindo a título de exemplo dois retângulos (i e j), podemos definir as restrições de não sobreposição: i apresenta-se totalmente à esquerda ou totalmente à direita de j (e vice-versa) e i apresenta-se totalmente em baixo ou totalmente em cima do item j (e vice-versa).

Define-se então o modelo de restrições como sendo:

$$\begin{aligned} x_i^C + 0.5w_i^F &\leq x_j^C - 0.5w_j^F + M \cdot r_{ij} & \forall i, j = 1, \dots, T_r; i \neq j \\ y_i^C + 0.5h_i^F &\leq y_j^C - 0.5h_j^F + M \cdot u_{ij} & \forall i, j = 1, \dots, T_r; i \neq j \\ r_{ij} + r_{ji} + u_{ij} + u_{ji} &\leq 3 & \forall i, j = 1, \dots, T_r; i < j; \end{aligned}$$

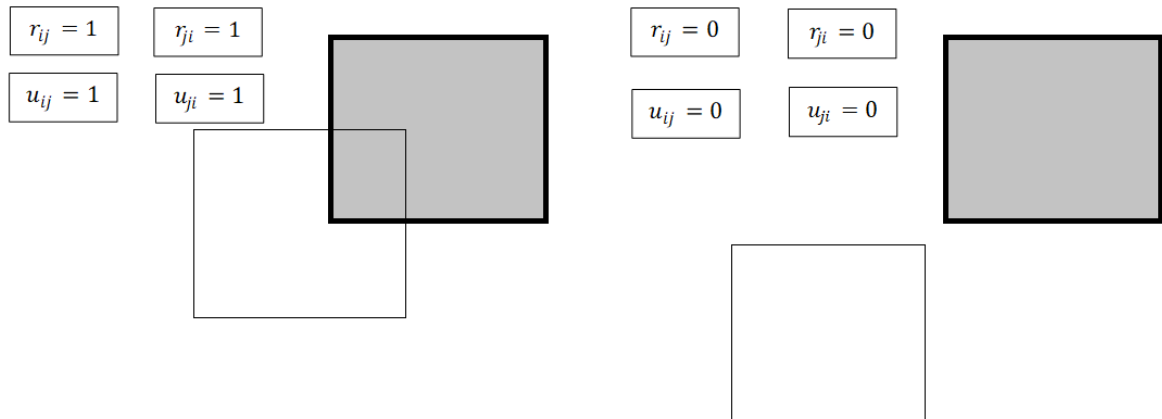


Figura 16 - Variáveis binárias nas equações de não-sobreposição; Autor, 2020

Relativamente à figura 16, podemos então notar que as variáveis r_{ij} e as variáveis u_{ij} são do tipo binárias e que impedem a sobreposição das peças, tanto verticalmente como horizontalmente. É, portanto, de extrema importância, que a soma destas variáveis das respectivas posições entre cada par de retângulos seja menor do que 3, sendo que, se não cumprirem esta restrição (imagem da esquerda) os itens irão se sobrepor. Podem-se rever os diferentes casos em anexo.

Em suma, podemos definir então o modelo matemático para itens retangulares simples assim que o mesmo cumpra o conjunto de restrições abordados no corrente subcapítulo, sendo estes:

- Restrições que mantenham os retângulos dentro da área admissível (dentro da tela; assinalados com 1 no modelo exemplo);
- Restrições de rotação de retângulos (assinalado a 2 no modelo exemplo);
- Restrições de não sobreposição entre retângulos (assinalado a 3 no modelo exemplo);

A título de exemplo, apresenta-se agora o modelo completo para uma melhor percepção em que usamos retângulos A e B ; de notar que o modelo pode ser aplicado à quantidade de retângulos necessária para a formação das caixas.

$$\text{MIN } W$$

Sujeito a:

A

$$\begin{aligned} x_A^C - 0.5w_A^F &\geq W_e \\ x_A^C + 0.5w_A^F &\leq W \\ y_A^C - 0.5h_A^F &\geq H_e \\ y_A^C + 0.5h_A^F &\leq H \end{aligned}$$

B

$$\begin{aligned} x_B^C - 0.5w_B^F &\geq W_e \\ x_B^C + 0.5w_B^F &\leq W \\ y_B^C - 0.5h_B^F &\geq H_e \\ y_B^C + 0.5h_B^F &\leq H \end{aligned}$$

Rotações

$$\begin{aligned} w_A^F &= (1 - v_A) \cdot w_A + v_A \cdot h_A \\ h_A^F &= (1 - v_A) \cdot h_A + v_A \cdot w_A \\ w_B^F &= (1 - v_B) \cdot w_B + v_B \cdot h_B \\ h_B^F &= (1 - v_B) \cdot h_B + v_B \cdot w_B \end{aligned}$$

Sobreposição

$$\begin{aligned} x_A^C + 0.5w_A^F &\leq x_B^C - 0.5w_B^F + M \cdot r_{AB} \\ y_A^C + 0.5h_A^F &\leq y_B^C - 0.5h_B^F + M \cdot u_{AB} \\ x_B^C + 0.5w_B^F &\leq x_A^C - 0.5w_A^F + M \cdot r_{BA} \\ y_B^C + 0.5h_B^F &\leq y_A^C - 0.5h_A^F + M \cdot u_{BA} \\ r_{AB} + r_{BA} + u_{AB} + u_{BA} &\leq 3 \end{aligned}$$

Analisando então o modelo acima descrito pelas equações pertencentes ao mesmo, são perceptíveis as restrições utilizadas, bem como o objetivo do mesmo.

3.1.2 Posicionamento de Itens Ortogonais

Presentemente, a empresa *Lival* elabora as suas caixas, a partir da tela cartonada (“favo”), com itens ortogonais e apenas procede à colagem das secções onde o cartão forma as juntas de modo a originar uma caixa. Este método facilita o trabalho de colagem do operador que, assim, ao invés de colar retângulos individuais, apenas cola onde se juntam as arestas do polígono ortogonal, mas limita, em termos de posicionamento na tela, as hipóteses, sendo uma forma mais complexa do que a de um retângulo.

No corrente subcapítulo é analisado o modelo matemático aplicado ao uso de polígonos ortogonais, sendo o principal objetivo otimizar o desperdício na produção dos mesmos, reduzindo-o ao mínimo possível.

Relativamente ao modelo apresentado no subcapítulo anterior em que os alvos de estudo eram retângulos, o modelo agora apresentado, observado de um prisma geral, é, em muitos aspetos, semelhante. Adicionam-se apenas algumas restrições e consequentes variáveis (como podemos observar na tabela 3).

São apresentados ao longo do subcapítulo os conceitos de “Mãe” e “Filha”. Estes conceitos são abordados sendo que, na aplicação do modelo com os itens ortogonais referentes à formação das caixas, é possível dividir cada item ortogonal em três retângulos simples. Para que o modelo funcione, denomina-se de peça “Mãe” o retângulo que ditará a posição final do item ortogonal e de “Filhas” os retângulos que se posicionarão de acordo com a posição da peça “Mãe”; de notar que a posição dos retângulos “Filhas” relativamente ao retângulo “Mãe” é sempre a mesma (restrições para manter esta posição relativa serão explicadas no decorrer do corrente capítulo).

Tabela 3 - Parâmetros usados em Itens Ortogonais

Parâmetros	Descrição
$F_{kl_k}^x$	Distância medida ao longo do eixo dos XX entre o centro da peça “Mãe”, k e o centro da peça “Filha” l_k
$F_{kl_k}^y$	Distância medida ao longo do eixo dos YY entre o centro da peça “Mãe”, k e o centro da peça “Filha” l_k
T_o	Número total de polígonos ortogonais
T_{ok}	Número total de peças “Filhas” do polígono ortogonal k
w_k	Comprimento do polígono ortogonal k
h_k	Altura do polígono ortogonal k
w_{kl_k}	Comprimento da peça “Filha” l_k do polígono ortogonal k
h_{kl_k}	Altura da peça “Filha” l_k do polígono ortogonal k
M	Número suficientemente grande
H	Altura da tela

$k \in \{1, \dots, T_o\}; l_k \in \{1, \dots, T_{ok}\}$

Tabela 4 - Variáveis usadas em Itens Ortogonais

Variáveis	Descrição
$z_{kl_k}^m$	Variável binária que indica a rotação do item filha l_k de um polígono ortogonal, k
$\Delta_{kl_k}^x$	Distância final, medida na horizontal (eixo dos XX) entre o centro da peça “Mãe” k e o centro da peça “Filha” l_k
$\Delta_{kl_k}^y$	Distância final, medida na vertical (eixo dos YY) entre o centro da peça “Mãe” k e o centro da peça “Filha” l_k
w_k^F	Comprimento final da peça “Mãe” de um polígono ortogonal, k
h_k^F	Altura final da peça “Mãe” de um polígono ortogonal, k
$w_{kl_k}^F$	Comprimento final da peça “Filha” l_k do polígono ortogonal, k
$h_{kl_k}^F$	Altura final da peça “Filha” l_k do polígono ortogonal, k
r_{ij}	Variável binária que indica se a peça i está ou não à esquerda da peça j , em que i e j são peças que pertencem a polígonos ortogonais distintos
u_{ij}	Variável binária que indica se a peça i está ou não abaixo da peça j , em que i e j são peças que pertencem a polígonos ortogonais distintos
x_k^C	Abcissa da posição final do centro da peça “Mãe” k , do polígono ortogonal
y_k^C	Ordenada da posição final do centro da peça “Mãe” k , do polígono ortogonal
$x_{kl_k}^C$	Abcissa da posição final do centro da peça “Filha” l_k do polígono ortogonal, k
$y_{kl_k}^C$	Ordenada da posição final do centro da peça “Filha” l_k do polígono ortogonal, k

$$k \in \{1, \dots, T_O\}; l_k \in \{1, \dots, T_{Ok}\}; m \in \{1, 2, 3, 4\}$$

No que toca a restrições das peças retangulares permanecerem no interior da tela, as restrições são as mesmas das apresentadas anteriormente. Devemos aqui salientar que estas restrições são aplicadas a todos os retângulos integrantes de cada polígono ortogonal.

As restrições de não-sobreposição são também idênticas, com a diferença de que só é necessário que sejam aplicadas entre pares de itens (ortogonais).

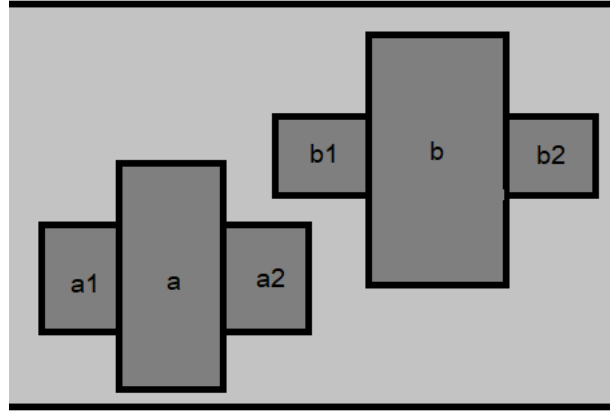


Figura 17 - Exemplo de itens ortogonais com posição final na tela; Autor, 2020

Como podemos analisar na figura 17, e a título de exemplo, o retângulo a_1 (integrante do polígono ortogonal a), apenas estará sujeito às restrições de não sobreposição entre os retângulos do polígono ortogonal b (retângulos b , b_1 e b_2), sendo que, as posições dos retângulos adjacentes e pertencentes ao mesmo polígono ortogonal (neste caso a) serão mantidas, tal como mencionado anteriormente, pela posição relativa entre peça “Mãe” e peças “Filhas”.

Tal como antes referido, entre pares de retângulos do mesmo item ortogonal, não é necessário aplicar restrições de não sobreposição, sendo que estas serão asseguradas pelo posicionamento que estes terão entre si. Para que esta condição seja possível de manter, para cada item ortogonal, é escolhida uma peça “Mãe” (peça que ditará o comportamento das peças restantes), e por consequência as peças “Filhas”.

Numa primeira instância, é imperativo definir o retângulo que ditará o resultado final “Mãe”, representada por a e, por consequência, proceder ao cálculo do $F_{al_a}^x$ e $F_{al_a}^y$ entre as peças “Mãe” e “Filhas”, neste exemplo como este polígono ortogonal só tem uma peça filha, para simplificar a notação F^x será F_{ab}^x e F^y representará F_{ab}^y , também será simplificada a notação das variáveis binárias, $z_{kl_k}^m$, passando a dotar-se só a nomenclatura $z^1=1$ a peça não roda, $z^2=1$ efetua uma rotação de 90° , $z^3=1$ para a rotação de 180° e por último $z^4=1$ para a rotação de 270° , exemplificado na figura

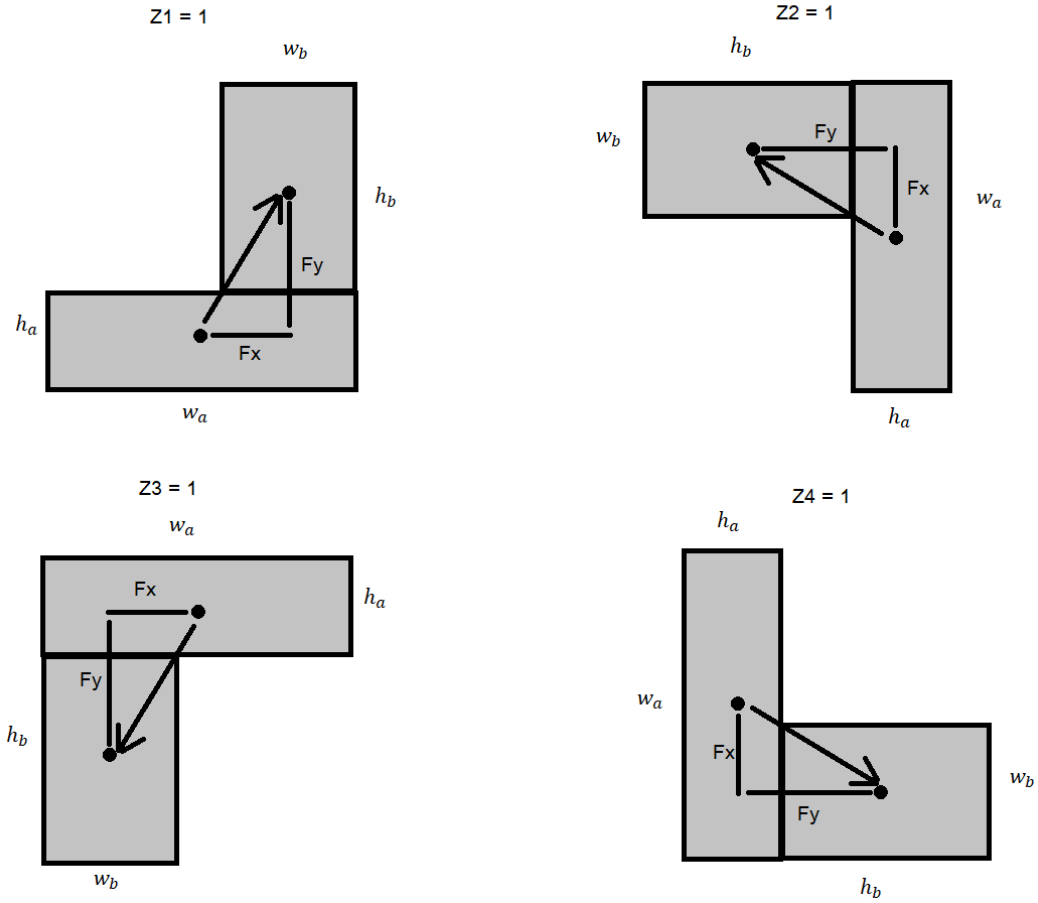


Figura 18 - Rotação em itens ortogonais; Autor, 2020

Com referido tanto as peças “Mãe” como as peças “Filhas”, que constituem cada um dos polígonos ortogonais, podem rodar, vimos que podiam ocorrer quatro rotações 0^0 , 90^0 , 180^0 e 270^0 . Apresentam-se de seguida o grupo de restrições que garantem que os polígonos ortogonais podem sofrer essas rotações, sem que a forma original se altere.

O grupo das duas primeiras restrições diz respeito às rotações da peça “Mãe”, as outras duas restrições seguintes referem-se às rotações das peças “Filhas”.

$$\begin{aligned} w_a^F &= (z_{ab}^1 + z_{ab}^3) \cdot w_a + (z_{ab}^2 + z_{ab}^4) \cdot h_a \quad \forall a - \text{peça "Mãe"} \text{ e } b - \text{peça "Filha"} \\ h_a^F &= (z_{ab}^2 + z_{ab}^4) \cdot w_a + (z_{ab}^1 + z_{ab}^3) \cdot h_a \quad \forall a - \text{peça "Mãe"} \text{ e } b - \text{peça "Filha"} \\ w_b^F &= (z_{ab}^1 + z_{ab}^3) \cdot w_b + (z_{ab}^2 + z_{ab}^4) \cdot h_b \quad \forall a - \text{peça "Mãe"} \text{ e } b - \text{peça "Filha"} \\ h_b^F &= (z_{ab}^2 + z_{ab}^4) \cdot w_b + (z_{ab}^1 + z_{ab}^3) \cdot h_b \quad \forall a - \text{peça "Mãe"} \text{ e } b - \text{peça "Filha"} \end{aligned}$$

Só uma das variáveis binárias, z_{ab}^m pode tomar o valor 1, pois só pode ocorrer uma das quatro possíveis rotações.

$$z_{ab}^1 + z_{ab}^2 + z_{ab}^3 + z_{ab}^4 = 1 \quad \forall a - \text{peça "Mãe"} \text{ e } b - \text{peça "Filha"}$$

E tem de se garantir que a rotação é a mesma quer para a peça “Mãe” quer para as peças “Filhas”, ou seja, as restrições garantem que se a peça mãe rodar as peças filhas têm de acompanhar essas mesma rotação, de modo assegurar a forma original do item ortogonal

$$z_{ab}^m = z_{ab'}^m, \quad \forall a - \text{peça "Mãe"}; \quad b \text{ e } b' - \text{peças "Filha"}$$

Sabe-se, nesta fase de desenvolvimento do modelo que os valores de F_x e F_y são as distâncias na horizontal e vertical do centro do retângulo “Mãe” e dos retângulos “Filhos”. Temos então, após calculo de F_x e F_y todas as ferramentas para proceder ao próximo passo que é a variação que as peças “Filhas” terão depois das devidas rotações da peça “Mãe”.

$$\begin{aligned} \Delta_{ab}^x &= F_{ab}^x \cdot z_{ab}^1 - F_{ab}^y \cdot z_{ab}^2 - F_{ab}^x \cdot z_{ab}^3 + F_{ab}^y \cdot z_{ab}^4 & \forall a - \text{peça "Mãe"} \text{ e } b - \text{peça "Filha"}; \\ \Delta_{ab}^y &= F_{ab}^y \cdot z_{ab}^1 - F_{ab}^x \cdot z_{ab}^2 - F_{ab}^y \cdot z_{ab}^3 + F_{ab}^x \cdot z_{ab}^4 & \forall a - \text{peça "Mãe"} \text{ e } b - \text{peça "Filha"}; \end{aligned}$$

Sabendo então, as variações que as peças “Filhas” terão relativamente a peça “Mãe” podemos aferir as suas posições finais.

$$\begin{aligned} x_b &= \Delta_{ab}^x + x_a & \forall a - \text{peça "Mãe"} \text{ e } b - \text{peça "Filha"} \\ y_b &= \Delta_{ab}^y + y_a & \forall a - \text{peça "Mãe"} \text{ e } b - \text{peça "Filha"} \end{aligned}$$

Apresentamos agora, a título de exemplo, o modelo aplicado aos itens 1 e 2 da figura 19 para que seja perceptível a utilização do mesmo. De notar que o modelo pode ser aplicado entre qualquer número de polígonos ortogonais requerido.

Para efeitos de cálculo, assumiu-se para esta simulação que $H = 2$.

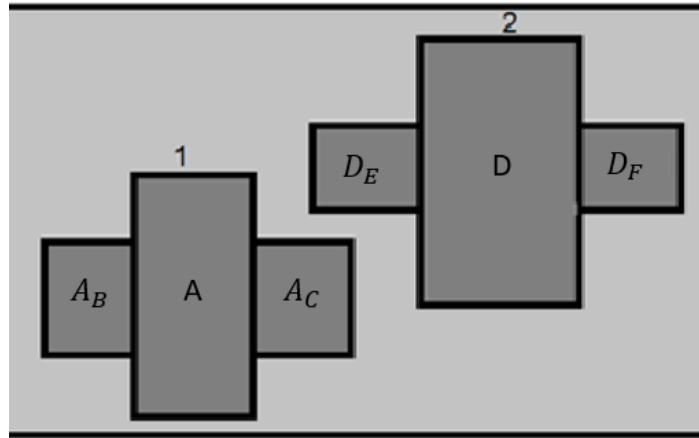


Figura 19 - Exemplo modelo; Autor, 2020

1. Definição de retângulos “Mãe” e “Filhos”; definiu-se que os retângulos A e D como sendo os retângulos “Mãe” de cada um dos polígonos ortogonais apresentados no exemplo, os restantes são todos denominados retângulos “Filhos”, A_B , A_C , D_E e D_F .
2. Cálculo do respetivo F^x e F^y (representados na figura 18) para cada um dos retângulos “Filhos”. Como já mencionado anteriormente, este passo é muito importante para cálculo posterior dos $\Delta_{kl_k}^x$ e $\Delta_{kl_k}^y$ de forma a manterem a posição relativa ao retângulo “Mãe”.

Tabela 5 - Cálculo de F^x e F^y

	F^x	F^y
A_B	-0,3	0
A_C	0,3	0
D_E	-0,4	0
D_F	0,4	0

3. Tendo todos os dados necessários, podemos observar em baixo o modelo desenvolvido em que são apresentadas ordenadamente as restrições da seguinte forma:
 - Restrições individuais que impedem que cada retângulo esteja fora da tela (para os seis retângulos em estudo);
 - Restrições de não sobreposição;
 - Rotações do retângulo “Mãe”, $k \in \{A, D\}$ e restrições que garantem que a peça ortogonal roda num todo;
 - Cálculo de $\Delta_{kl_k}^x$ e $\Delta_{kl_k}^y$, $k \in \{A, D\}$ e $l_A \in \{A_B, A_C\}$, $l_D \in \{D_E, D_F\}$;
 - Cálculo final das coordenadas dos retângulos “Filhos”;

$MIN \ W$

A

$$\begin{aligned} x_A^C - 0.5w_A^F &\geq W_e \\ x_A^C + 0.5w_A^F &\leq W \\ y_A^C - 0.5h_A^F &\geq H_e \\ y_A^C + 0.5h_A^F &\leq H \end{aligned}$$

A_B

$$\begin{aligned} x_{AA_B}^C - 0.5w_{AA_B}^F &\geq W_e \\ x_{AA_B}^C + 0.5w_{AA_B}^F &\leq W \\ y_{AA_B}^C - 0.5h_{AA_B}^F &\geq H_e \\ y_{AA_B}^C + 0.5h_{AA_B}^F &\leq H \end{aligned}$$

A_C

$$\begin{aligned} x_{AA_C}^C - 0.5w_{AA_C}^F &\geq W_e \\ x_{AA_C}^C + 0.5w_{AA_C}^F &\leq W \\ y_{AA_C}^C - 0.5h_{AA_C}^F &\geq H_e \\ y_{AA_C}^C + 0.5h_{AA_C}^F &\leq H \end{aligned}$$

D

$$\begin{aligned} x_D^C - 0.5w_D^F &\geq W_e \\ x_D^C + 0.5w_D^F &\leq W \\ y_D^C - 0.5h_D^F &\geq H_e \\ y_D^C + 0.5h_D^F &\leq H \end{aligned}$$

D_E

$$\begin{aligned} x_{DD_E}^C - 0.5w_{DD_E}^F &\geq W_e \\ x_{DD_E}^C + 0.5w_{DD_E}^F &\leq W \\ y_{DD_E}^C - 0.5h_{DD_E}^F &\geq H_e \\ y_{DD_E}^C + 0.5h_{DD_E}^F &\leq H \end{aligned}$$

D_F

$$\begin{aligned} x_{DD_F}^C - 0.5w_{DD_F}^F &\geq W_e \\ x_{DD_F}^C + 0.5w_{DD_F}^F &\leq W \\ y_{DD_F}^C - 0.5h_{DD_F}^F &\geq H_e \\ y_{DD_F}^C + 0.5h_{DD_F}^F &\leq H \end{aligned}$$

A-D

$$\begin{aligned}x_A^C + 0.5w_A^F &\leq x_D^C - 0.5w_D^F + M \cdot r_{AD} \\y_A^C + 0.5h_A^F &\leq y_D^C - 0.5h_D^F + M \cdot u_{AD} \\x_D^C + 0.5w_D^F &\leq x_A^C - 0.5w_A^F + M \cdot r_{DA} \\y_D^C + 0.5h_D^F &\leq y_A^C - 0.5h_A^F + M \cdot u_{DA} \\r_{ad} + r_{DA} + u_{AD} + u_{DA} &\leq 3\end{aligned}$$

A-D_E

$$\begin{aligned}x_A^C + 0.5w_A^F &\leq x_{D_E}^C - 0.5w_{D_E}^F + M \cdot r_{AD_E} \\y_A^C + 0.5h_A^F &\leq y_{D_E}^C - 0.5h_{D_E}^F + M \cdot u_{AD_E} \\x_{D_E}^C + 0.5w_{D_E}^F &\leq x_A^C - 0.5w_A^F + M \cdot r_{D_EA} \\y_{D_E}^C + 0.5h_{D_E}^F &\leq y_A^C - 0.5h_A^F + M \cdot u_{D_EA} \\r_{AD_E} + r_{D_EA} + u_{AD_E} + u_{D_EA} &\leq 3\end{aligned}$$

A-D_F

$$\begin{aligned}x_A^C + 0.5w_A^F &\leq x_{D_F}^C - 0.5w_{D_F}^F + M \cdot r_{AD_F} \\y_A^C + 0.5h_A^F &\leq y_{D_F}^C - 0.5h_{D_F}^F + M \cdot u_{AD_F} \\x_{D_F}^C + 0.5w_{D_F}^F &\leq x_A^C - 0.5w_A^F + M \cdot r_{D_FA} \\y_{D_F}^C + 0.5h_{D_F}^F &\leq y_A^C - 0.5h_A^F + M \cdot u_{D_FA} \\r_{AD_F} + r_{D_FA} + u_{AD_F} + u_{D_FA} &\leq 3\end{aligned}$$

A_B-D

$$\begin{aligned}x_{A_B}^C + 0.5w_{A_B}^F &\leq x_D^C - 0.5w_D^F + M \cdot r_{A_BD} \\y_{A_B}^C + 0.5h_{A_B}^F &\leq y_D^C - 0.5h_D^F + M \cdot u_{A_BD} \\x_D^C + 0.5w_D^F &\leq x_{A_B}^C - 0.5w_{A_B}^F + M \cdot r_{DA_B} \\y_D^C + 0.5h_D^F &\leq y_{A_B}^C - 0.5h_{A_B}^F + M \cdot u_{DA_B} \\r_{A_BD} + r_{DA_B} + u_{A_BD} + u_{DA_B} &\leq 3\end{aligned}$$

A_B-D_E

$$\begin{aligned}x_{A_B}^C + 0.5w_{A_B}^F &\leq x_{D_E}^C - 0.5w_{D_E}^F + M \cdot r_{A_BD_E} \\y_{A_B}^C + 0.5h_{A_B}^F &\leq y_{D_E}^C - 0.5h_{D_E}^F + M \cdot u_{A_BD_E} \\x_{D_E}^C + 0.5w_{D_E}^F &\leq x_{A_B}^C - 0.5w_{A_B}^F + M \cdot r_{D_EA_B} \\y_{D_E}^C + 0.5h_{D_E}^F &\leq y_{A_B}^C - 0.5h_{A_B}^F + M \cdot u_{D_EA_B} \\r_{A_BD_E} + r_{D_EA_B} + u_{A_BD_E} + u_{D_EA_B} &\leq 3\end{aligned}$$

A_B-D_F

$$\begin{aligned} x_{A_B}^C + 0.5w_{A_B}^F &\leq x_{D_F}^C - 0.5w_{D_F}^F + M.r_{A_B D_F} \\ y_{A_B}^C + 0.5h_{A_B}^F &\leq y_{D_F}^C - 0.5h_{D_F}^F + M.u_{A_B D_F} \\ x_{D_F}^C + 0.5w_{D_F}^F &\leq x_{A_B}^C - 0.5w_{A_B}^F + M.r_{D_F A_B} \\ y_{D_F}^C + 0.5h_{D_F}^F &\leq y_{A_B}^C - 0.5h_{A_B}^F + M.u_{D_F A_B} \\ r_{A_B D_F} + r_{D_F A_B} + u_{A_B D_F} + u_{D_F A_B} &\leq 3 \end{aligned}$$

A_C-D

$$\begin{aligned} x_{A_C}^C + 0.5w_{A_C}^F &\leq x_D^C - 0.5w_D^F + M.r_{A_C D} \\ y_{A_C}^C + 0.5h_{A_C}^F &\leq y_D^C - 0.5h_D^F + M.u_{A_C D} \\ x_D^C + 0.5w_D^F &\leq x_{A_C}^C - 0.5w_{A_C}^F + M.r_{D A_C} \\ y_D^C + 0.5h_D^F &\leq y_{A_C}^C - 0.5h_{A_C}^F + M.u_{D A_C} \\ r_{A_C D} + r_{D A_C} + u_{A_C D} + u_{D A_C} &\leq 3 \end{aligned}$$

A_C-D_E

$$\begin{aligned} x_{A_C}^C + 0.5w_{A_C}^F &\leq x_{D_E}^C - 0.5w_{D_E}^F + M.r_{A_C D_E} \\ y_{A_C}^C + 0.5h_{A_C}^F &\leq y_{D_E}^C - 0.5h_{D_E}^F + M.u_{A_C D_E} \\ x_{D_E}^C + 0.5w_{D_E}^F &\leq x_{A_C}^C - 0.5w_{A_C}^F + M.r_{D_E A_C} \\ y_{D_E}^C + 0.5h_{D_E}^F &\leq y_{A_C}^C - 0.5h_{A_C}^F + M.u_{D_E A_C} \\ r_{A_C D_E} + r_{D_E A_C} + u_{A_C D_E} + u_{D_E A_C} &\leq 3 \end{aligned}$$

A_C-D_F

$$\begin{aligned} x_{A_C}^C + 0.5w_{A_C}^F &\leq x_{D_F}^C - 0.5w_{D_F}^F + M.r_{A_C D_F} \\ y_{A_C}^C + 0.5h_{A_C}^F &\leq y_{D_F}^C - 0.5h_{D_F}^F + M.u_{A_C D_F} \\ x_{D_F}^C + 0.5w_{D_F}^F &\leq x_{A_C}^C - 0.5w_{A_C}^F + M.r_{D_F A_C} \\ y_{D_F}^C + 0.5h_{D_F}^F &\leq y_{A_C}^C - 0.5h_{A_C}^F + M.u_{D_F A_C} \\ r_{A_C D_F} + r_{D_F A_C} + u_{A_C D_F} + u_{D_F A_C} &\leq 3 \end{aligned}$$

A

$$\begin{aligned} w_A^F &= (z_{AA_B}^1 + z_{AA_B}^3).w_A + (z_{AA_B}^2 + z_{AA_B}^4).h_A \\ w_A^F &= (z_{AA_C}^1 + z_{AA_C}^3).w_A + (z_{AA_C}^2 + z_{AA_C}^4).h_A \\ h_A^F &= (z_{AA_B}^2 + z_{AA_B}^4).w_A + (z_{AA_B}^1 + z_{AA_B}^3).h_A \\ h_A^F &= (z_{AA_C}^2 + z_{AA_C}^4).w_A + (z_{AA_C}^1 + z_{AA_C}^3).h_A \end{aligned}$$

A_B

$$w_{AB}^F = (z_{AA_B}^1 + z_{AA_B}^3) \cdot w_{AB} + (z_{AA_B}^2 + z_{AA_B}^4) \cdot h_{AB}$$

$$h_{AB}^F = (z_{AA_B}^2 + z_{AA_B}^4) \cdot w_{AB} + (z_{AA_B}^1 + z_{AA_B}^3) \cdot h_{AB}$$

 A_C

$$w_{AC}^F = (z_{AA_C}^1 + z_{AA_C}^3) \cdot w_{AC} + (z_{AA_C}^2 + z_{AA_C}^4) \cdot h_{AC}$$

$$h_{AC}^F = (z_{AA_C}^2 + z_{AA_C}^4) \cdot w_{AC} + (z_{AA_C}^1 + z_{AA_C}^3) \cdot h_{AC}$$

$$z_{AA_B}^1 = z_{AA_C}^1$$

$$z_{AA_B}^2 = z_{AA_C}^2$$

$$z_{AA_B}^3 = z_{AA_C}^3$$

$$z_{AA_B}^4 = z_{AA_C}^4$$

$$z_{AA_B}^1 + z_{AA_B}^2 + z_{AA_B}^3 + z_{AA_B}^4 = 1$$

$$z_{AA_C}^1 + z_{AA_C}^2 + z_{AA_C}^3 + z_{AA_C}^4 = 1$$

 D

$$w_D^F = (z_{DD_E}^1 + z_{DD_E}^3) \cdot w_D + (z_{DD_E}^2 + z_{DD_E}^4) \cdot h_D$$

$$w_D^F = (z_{DD_F}^1 + z_{DD_F}^3) \cdot w_D + (z_{DD_F}^2 + z_{DD_F}^4) \cdot h_D$$

$$h_D^F = (z_{DD_E}^2 + z_{DD_E}^4) \cdot w_D + (z_{DD_E}^1 + z_{DD_E}^3) \cdot h_D$$

$$h_D^F = (z_{DD_F}^2 + z_{DD_F}^4) \cdot w_D + (z_{DD_F}^1 + z_{DD_F}^3) \cdot h_D$$

 D_E

$$w_{D_E}^F = (z_{DD_E}^1 + z_{DD_E}^3) \cdot w_{D_E} + (z_{DD_E}^2 + z_{DD_E}^4) \cdot h_{D_E}$$

$$h_{D_E}^F = (z_{DD_E}^2 + z_{DD_E}^4) \cdot w_{D_E} + (z_{DD_E}^1 + z_{DD_E}^3) \cdot h_{D_E}$$

 D_F

$$w_{D_F}^F = (z_{DD_F}^1 + z_{DD_F}^3) \cdot w_{D_F} + (z_{DD_F}^2 + z_{DD_F}^4) \cdot h_{D_F}$$

$$h_{D_F}^F = (z_{DD_F}^2 + z_{DD_F}^4) \cdot w_{D_F} + (z_{DD_F}^1 + z_{DD_F}^3) \cdot h_{D_F}$$

$$z_{DD_E}^1 = z_{DD_F}^1$$

$$z_{DD_E}^2 = z_{DD_F}^2$$

$$z_{DD_E}^3 = z_{DD_F}^3$$

$$z_{DD_E}^4 = z_{DD_F}^4$$

$$z_{DD_E}^1 + z_{DD_E}^2 + z_{DD_E}^3 + z_{DD_E}^4 = 1$$

$$z_{DD_F}^1 + z_{DD_F}^2 + z_{DD_F}^3 + z_{DD_F}^4 = 1$$

 $A-A_B$

$$\Delta_{AA_B}^x = F_{AA_B}^x \cdot z_{AA_B}^1 - F_{AA_B}^y \cdot z_{AA_B}^2 - F_{AA_B}^x \cdot z_{AA_B}^3 + F_{AA_B}^y \cdot z_{AA_B}^4$$

$$\Delta_{AA_B}^y = F_{AA_B}^y \cdot z_{AA_B}^1 - F_{AA_B}^x \cdot z_{AA_B}^2 - F_{AA_B}^y \cdot z_{AA_B}^3 + F_{AA_B}^x \cdot z_{AA_B}^4$$

A-A_C

$$\begin{aligned}\Delta_{AA_C}^x &= F_{AA_C}^x \cdot z_{AA_C}^1 - F_{AA_C}^y \cdot z_{AA_C}^2 - F_{AA_C}^x \cdot z_{AA_C}^3 + F_{AA_C}^y \cdot z_{AA_C}^4 \\ \Delta_{AA_C}^y &= F_{AA_C}^y \cdot z_{AA_C}^1 - F_{AA_C}^x \cdot z_{AA_C}^2 - F_{AA_C}^y \cdot z_{AA_C}^3 + F_{AA_C}^x \cdot z_{AA_C}^4\end{aligned}$$

D-D_E

$$\begin{aligned}\Delta_{DD_E}^x &= F_{DD_E}^x \cdot z_{DD_E}^1 - F_{DD_E}^y \cdot z_{DD_E}^2 - F_{DD_E}^x \cdot z_{DD_E}^3 + F_{DD_E}^y \cdot z_{DD_E}^4 \\ \Delta_{DD_E}^y &= F_{DD_E}^y \cdot z_{DD_E}^1 + F_{DD_E}^x \cdot z_{DD_E}^2 - F_{DD_E}^y \cdot z_{DD_E}^3 - F_{DD_E}^x \cdot z_{DD_E}^4\end{aligned}$$

D-D_F

$$\begin{aligned}\Delta_{DD_F}^x &= F_{DD_F}^x \cdot z_{DD_F}^1 - F_{DD_F}^y \cdot z_{DD_F}^2 - F_{DD_F}^x \cdot z_{DD_F}^3 + F_{DD_F}^y \cdot z_{DD_F}^4 \\ \Delta_{DD_F}^y &= F_{DD_F}^y \cdot z_{DD_F}^1 - F_{DD_F}^x \cdot z_{DD_F}^2 - F_{DD_F}^y \cdot z_{DD_F}^3 + F_{DD_F}^x \cdot z_{DD_F}^4\end{aligned}$$

A_B

$$\begin{aligned}x_{AA_B}^F &= \Delta_{AA_B}^x + x_A^C \\ y_{AA_B}^F &= \Delta_{AA_B}^y + y_A^C\end{aligned}$$

A_C

$$\begin{aligned}x_{AA_C}^F &= \Delta_{AA_C}^x + x_A^C \\ y_{AA_C}^F &= \Delta_{AA_C}^y + y_A^C\end{aligned}$$

D_E

$$\begin{aligned}x_{DD_E}^F &= \Delta_{DD_E}^x + x_D^C \\ y_{DD_E}^F &= \Delta_{DD_E}^y + y_D^C\end{aligned}$$

D_F

$$\begin{aligned}x_{DD_F}^F &= \Delta_{DD_F}^x + x_D^C \\ y_{DD_F}^F &= \Delta_{DD_F}^y + y_D^C;\end{aligned}$$

Refere-se que, neste modelo, as equações e complexidade do mesmo são bastante mais extensas do que no modelo construído apenas com retângulos.

Como resultado deste teste exemplo podemos aferir que o comprimento final da tela (*W*) é de 1,4 e as coordenadas dos retângulos (sendo X e Y as coordenadas dos centros) são as seguintes:

Tabela 6 - Resultado final de simulação; Autor, 2020

	X	Y
A	0,45	1,55
A_B	0,15	1,55
A_C	0,75	1,55
D	1	1,2
D_E	0,8	1,2
D_F	1,2	1,2

3.2 Resultados Computacionais

Neste capítulo, com o objetivo de minimizar o comprimento da tela de favo de cartão apresentam-se experiências computacionais dos modelos matemáticos espelhados no capítulo anterior, com o objetivo de minimizar os desperdícios. Isto significa que, para cada simulação corrida, o comprimento da tela de favo de cartão terá de ser o menor possível.

Começa-se por analisar as vantagens e desvantagens para a *Lival*, da utilização de cada um dos modelos mencionados anteriormente. Este passo é de suma importância. Testou-se o modelo usando retângulos, fazendo diversas simulações e estudando o desperdício. Relativamente aos polígonos ortogonais correu-se apenas a simulação de forma a confirmar a autenticidade e validade do modelo, sendo que a complexidade do mesmo não nos permite correr no Solver por exceder o número de variáveis.

Tabela 7 - Vantagens e Desvantagens de cada modelo

	Vantagens	Desvantagens
Modelo retângulos	<ul style="list-style-type: none"> • Mais simples • Mais rápido • Atualmente já aplicada a forma na fábrica 	<ul style="list-style-type: none"> • Maior tempo de colagem • Menos abrangente • Maior desperdício
Modelo Polígonos Ortogonais	<ul style="list-style-type: none"> • Tempo de colagem mais rápido • Menor desperdício 	<ul style="list-style-type: none"> • Mais complexo

Formularam-se então simulações, para o caso do modelo usando retângulos que permitem observar, a um nível mais perceptível, a diferença em termos de desperdício comparando com a realidade ao dia de hoje da *Lival*. Foi também corrida uma simulação usando polígonos ortogonais e uma mista no caso de serem também requerida.

3.2.1 Simulação retângulos

No modelo matemático corrido apenas com retângulos, que segue as indicações/equações presentes no capítulo 7.1 podemos aferir resultados, que, tal como espectável, a minimização de desperdício relativamente ao método usado atualmente.

Para realizar um melhor estudo e ter percepção real dos resultados que o modelo possa ter aquando aplicado, desenvolveu-se, com o auxílio do VBA, uma ferramenta que pode desde já ser utilizada pela empresa e que ao mesmo tempo nos permite simular diversas encomendas e ter acesso aos dados das mesmas. Usaram-se os tamanhos standard que neste se usam na unidade fabril (Caixas A, B e C apresentadas no capítulo 1)

Esta ferramenta é, neste momento, o SAD que a empresa dispõe de forma a otimizar as encomendas. A ferramenta funciona com o tamanho de caixas standard apresentado no capítulo 1, em que, tal como podemos observar na figura 20, após ser pressionado o botão “Obter Padrão” temos acesso a um formulário onde se podem introduzir o número de caixas para cada um dos tamanhos que seja desejado. De notar que, para efeitos de teste e de adaptabilidade para futuro na empresa é possível alterar a altura da tela, bem como os tamanhos respetivos a cada caixa.

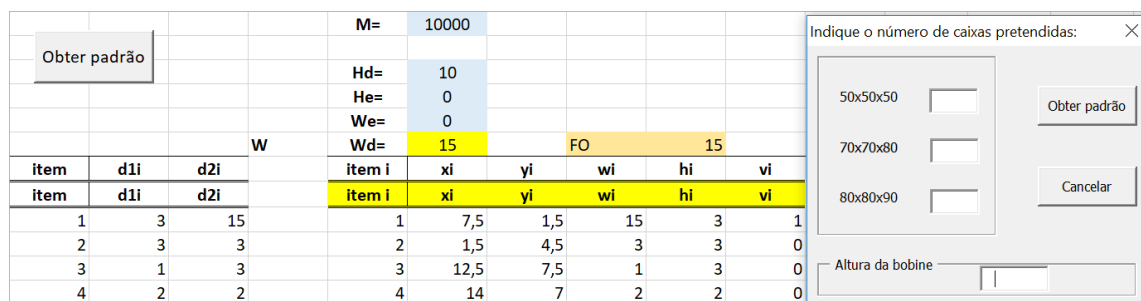


Figura 20 - SAD desenvolvido, exemplo; Autor, 2020

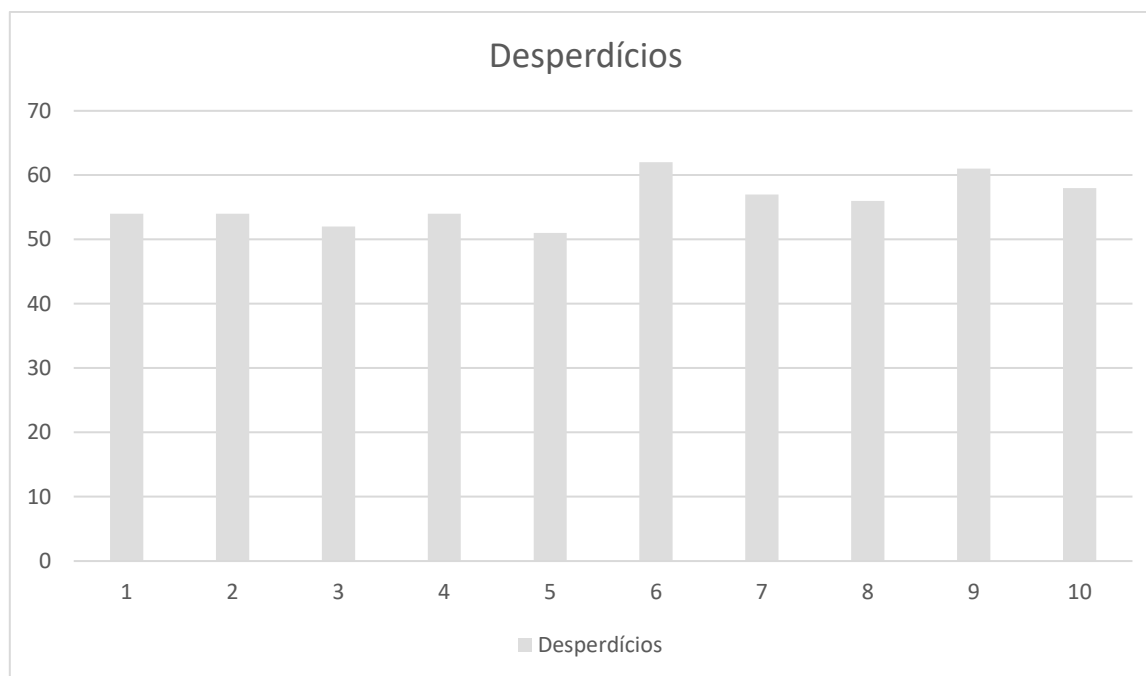
Como resultado final da simulação, tal como delineado e explicado ao longo da dissertação, obtemos as coordenadas finais de cada retângulo de forma a minimizar o comprimento de tela. Essas coordenadas podem ser consultadas na figura 20, assinaladas na coluna x_i e y_i , bem como o facto de os retângulos terem ou não rodado na coluna v . É nos também apresentado o resultado final de comprimento da tela correspondente ao W_d .

Este modelo tem a vantagem de ser rápido, simples e principalmente, já estar, ao dia de hoje, implementado na unidade fabril.

Na tabela 8 apresenta-se o gráfico e consequente tabela de interpretação com as simulações corridas e correspondentes desperdícios. De notar que a altura standard usada na unidade fabril é de 2,6 metros. No entanto em ambiente de empresarial poderá haver bobines de diferentes alturas e terá interesse avaliar qual a melhor altura de tela a utilizar. Podendo a empresa optar o mudar a bobine ou trabalhar com essa, tendo à partida conhecimento do desperdício gerado.

Tabela 8 - Simulações; Autor, 2020

Simulação	Nº Caixa A (50x50x50)	Nº Caixa B (70x70x80)	Nº Caixa C (80x80x90)	Altura Tela	W_d	Desperdício
1	1	1	1	260	640	54%
2	1	2	1	260	870	54%
3	1	1	2	260	900	52%
4	1	3	1	260	1100	54%
5	1	1	3	260	1160	51%
6	1	1	1	520	380	62%
7	1	2	1	520	460	57%
8	1	1	2	520	490	56%
9	1	3	1	520	640	61%
10	1	1	3	520	670	58%



De notar que, comparando com o valor inicial de desperdício apresentado pela empresa, o valor atual de desperdício, considerando os milhares de unidades produzidas, é substancialmente menor e que, aumentado a altura da tela conseguimos diminuir a comprimento da mesma mas não necessariamente obter resultados com menor desperdício.

Avaliando então de forma geral os resultados obtidos com estas simulações podemos afirmar que, usando este modelo, rentabilizamos a tela em 4,1% sendo uma melhoria significativa no custo total, sabendo agora que a média total passa para os 55,9%.

Podemos na figura 21, recorrendo ao resultado da simulação número 4, observar o padrão obtido, um exemplo do resultado final do plano de corte a adotar pela empresa. Este padrão é obtido usando a ferramenta Latex que atualmente será usada como complemento do SAD. Este tipo de plano seria benéfico adotar pela empresa sendo que, a interpretação de planos por imagem é bastante mais fácil e intuitiva do que olhando apenas para as coordenadas do centro dos retângulos, obtidas pelo modelo matemático.

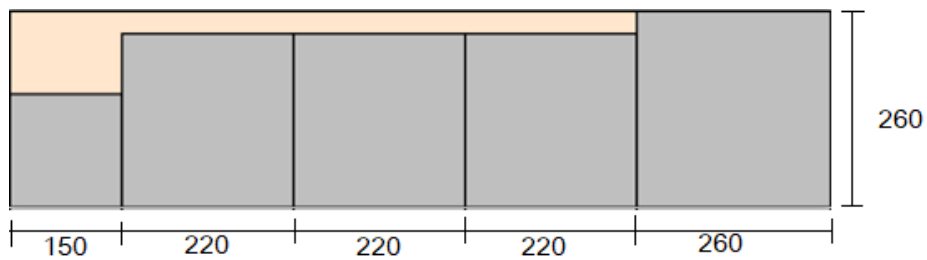


Figura 21 - Padrão obtido na simulação 4 da tabela 8; Autor, 2020

3.2.2 Simulação Polígonos Ortogonais

Relativamente ao modelo corrido utilizando polígonos ortogonais, seguindo o modelo que se restringe pelas equações apresentadas no capítulo 7.2 podemos especular resultados extremamente promissores no que toca a desperdícios, embora este último tenha de ser estudado com maior atenção.

No caso dos polígonos ortogonais, por uma questão de limitação de capacidade da ferramenta SOLVER no Excel, apenas se consegue correr o modelo com um item ortogonal, sendo que, para o caso de se correr com dois itens, o número de variáveis supera o limite admissível pelo *solver*.

Sendo assim, a nível de resultados, não tendo simulações com diversos itens, não temos a confirmação do potencial da ferramenta utilizando estas formas, sendo portanto imperativo, no futuro da empresa, desenvolver este modelo de forma a melhor comparar com o modelo atual de retângulos.

Apesar de não ser possível a simulação com diversos itens, foi corrido o modelo para um item ortogonal que nos permitiu validar a funcionalidade do mesmo, assim como um modelo misto (um ortogonal e um retângulo).

Apresenta-se então a simulação usando um padrão misto e consequente resultado final. Esta simulação tem a finalidade de validação de adaptabilidade do modelo, sendo que, tal como podemos ver em baixo nos resultados, o mesmo funciona para itens ortogonais ou uma mistura de itens ortogonais com retângulos.

item	d1i	d2i		M=	100
1	1	1	p		
2	2	2			
3	1	1		Hd=	4
4	1	2		He=	0
				We=	0
				Wd=	3
Variáveis de para cada item					
i	xi	yi	wi	hi	
1	1	2	2	2	
2	1	0,5	1	1	
3	1	3,5	1	1	
4	2,5	2	1	2	

Figura 22 - Exemplo de modelo misto; Autor 2020

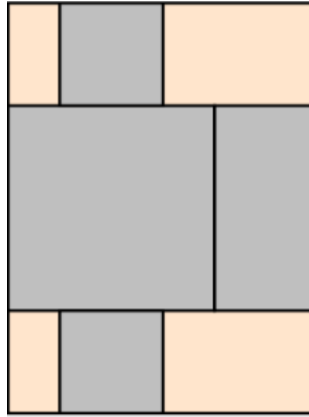


Figura 23 - Exemplo misto em latex; Autor, 2020

Nesta simulação específica o desperdício é de 33%, bastante inferior ao estudado nos retângulos, mas considerando que não se usaram as medidas standard de altura da tela.

Considerando então estes resultados, podemos afirmar que é de todo interesse da empresa que se estude, com um software que suporte o modelo, futuras simulações e estudo de minimização da tela e consequentemente de desperdícios usando o modelo de polígonos ortogonais.

CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

4.1 Conclusões

4.2 Trabalhos Futuros

4. CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

4.1 Conclusões

O principal objetivo da corrente dissertação é, como descrito ao longo da mesma, minimizar o desperdício da tela de cartão aquando da produção de caixas, minimizando o comprimento da tela.

Ao longo da dissertação foram analisados diferentes tipos de abordagens que poderiam ser tomadas, bem como métodos de otimização que podem ser aplicados, não só ao corte na produção de caixas, mas também a outros processos existentes dentro e fora na unidade fabril.

Com o auxílio do modelo matemático construído e com os dados de desperdício fornecidos pela *Lival*, podemos afirmar que, para uso do modelo apresentado usando retângulos e consequente minimização do comprimento final da tela (W), a *Lival* poderá minimizar o desperdício de cartão no corte de caixas em 4,1%, e, para o caso de usar o modelo usando polígonos ortogonais é espectável que este número seja superior

Recorrendo ao modelo e à aplicação do mesmo em Excel (com auxílio de VBA), foi possível aferir que o desperdício é de 55,9% (em média) para o caso do modelo usando retângulos.

De notar que o objetivo foi concluído e que, na presente data, a *Lival* aufere de um sistema de apoio à decisão em que os seus funcionários dão como parâmetros de entrada a encomenda (número de caixas) que querem fabricar e, automaticamente, o sistema retribui as coordenadas finais dos retângulos integrantes das caixas, bem como um plano de corte que pode ser consultado no desenho padrão. Referir que atualmente o modelo funciona para um número limitado de retângulos e está programado de forma utilizar o tamanho atual da tela 2,6 metros.

A título de conclusão estamos perante a possibilidade de afirmar que o desenvolvimento deste modelo poderá, nas atuais circunstâncias, ser de grande importância para a otimização do atual processo produtivo e consequente viabilidade da fábrica sendo o mesmo uma forma, não só de minimizar desperdícios minimizando o comprimento final da tela, mas também os custos produtivos.

Particularmente no atual contexto, difícil para a indústria em geral (devido aos constrangimentos causados pelo COVID-19), a solução perfila-se como uma vantagem competitiva para a reabertura dos mercados e, possivelmente, para anos vindouros.

4.2 Trabalho futuro

Numa primeira análise do trabalho desenvolvido na corrente dissertação podemos afirmar que o uso do modelo usando polígonos ortogonais seria a opção mais viável em termos de desperdícios. No entanto, o uso do mesmo implicaria um maior tempo de corte que pode acabar por se transformar em desperdício de tempo. Estamos então presentes de uma situação que carece de uma análise mais profunda de modo a poder optar pela melhor hipótese.

Como próximo passo, o lógico será a *Lival* aplicar o modelo matemático não só à produção de caixas, mas também à produção de outros produtos que tenham origem numa tela sem fim.

O modelo deverá ser adaptado e, idealmente, deverá ser desenvolvido o respetivo VBA (para itens ortogonais) que, de acordo com as encomendas a imputar, devolverá automaticamente o plano de corte.

Poder-se-á, para finalizar, referir que, sendo a *Lival* uma empresa permanentemente dedicada à melhoria contínua e constante evolução e que augura, num futuro próximo, a efetivação de uma loja online para os seus produtos, este sistema poderá ser integrado da mesma forma, automatizando ao máximo os processos, tirando o melhor proveito dos mesmos, reduzindo assim desperdícios, custos e tempo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alter, S.L. (1980). *Decision Support Systems: Current Practice and Continuing Challenge*; . MA: Addison-Wesley; No. 04; HD30. 23, A5.. 1980.
- Dantzig, George Bernard. (1998). *Linear Programming and Extensions*. Princeton university press.
- Decision Support System*. (15 de 12 de 2019). Obtido de <https://www.intechopen.com/books/management-of-information-systems/decision-support-systems>
- Dowsland, K. A. Dowsland & W. B. (1992). Packing problems. *European Journal of Operational Research*; 56.1: 2-14.
- Dyckhoff, Harald. (1990). A typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*; 44.2: 145-159.
- E. D. Demaine, J. S. (2006). *The Open Problems project*. Obtido de <http://maven.smith.edu/~orourke/TOPPP/>
- Ehlich, P. J. (2004). *Programação Linear e Decisão*.
- Finke, H. Dyckhoff & U. (1992). *Cutting and Packing in Production and Distribution: Typology and Bibliography* . (eds. Mueller, W.A. and Schuster, P.) Springer-Verlag.
- G. Wäscher, H. Haußner, and H. Schumann. (2004). *An Improved Typology of Cutting and Packing Problems*; p. 18-20. 1st ESICUP Meeting, Lutherstadt Wittenberg, Germany.
- GILMORE, P & GOMORY. (1965). *Multistage cutting stock problems of two and more dimensions*. *Operations Research*. 13. 10.1287/opre.13.1.94.
- Goldberg, Marco. (2000). *Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos*. Rio de Janeiro: Campus 1; 1: 639.
- H. Dyckhoff, G. Scheithauer, and J. Terno. (1997). *Cutting and packing*. In M. Dell’Amico, F. Maffioli, and S. Martello, editors, *Annotated Bibliographies in Combinatorial Optimization*; M. 1997.
- Johnson, M. R. (1979). *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*.
- Keen, P. G., & S. M. (1980). *Decision support systems : a research perspective*. Cambridge, Mass. : Center for Information Systems Research, Alfred P. Sloan School of Management.
- Lodi, Andrea & Martello, Silvano & Monaci, Michele. (2002). Two-dimensional packing problems: A survey. *European Journal of Operational Research*, 141. 241-252. 10.1016/S0377-2217(02)00123-6.

- Mitsutoshi KENMOCHI, Takashi IMAMICHI, Koji NONOBE, Mutsunori YAGIURA, Hiroshi NAGAMOCCHI. (2007). *Exact Algorithms for the 2-Dimensional Strip Packing Problem with and without Rotations*; 198.1: 73-83.
- Power, D. (31 de May de 2003). *A brief history od decison support systems*. Obtido de DSSResources.COM: <http://DSSResources.COM/history/dsshhistory.html>
- Sprague, R. H., & E. D. Carlson. (1982). *Building Effective Decision Support Systems*. Englewood Cliffs: N.J.: Prentice-Hall, Inc.
- System 360. (7 de 12 de 2019). Obtido de <https://www.ibm.com/ibm/history/ibm100/us/en/icons/system360/>
- Vairinhos, V. M., V. Lobo, and R. R. Parreira. (2009). *Introdução à Análise de Dados de manutenção*. Projecto MECPAB.
- Wäscher G., Haußner H., & Schumann H. (2007). *An improved typology of cutting and packing problems*. European Journal of Operational Research; 183.3: 1109-1130.